

M. O. GONZÁLEZ / J.D. MANCILL

Algebra Elemental Moderna

VOLUMEN 1

Álgebra elemental moderna

M. O. GONZÁLEZ

Ex Profesor de la Universidad de La Habana (Cuba). Profesor
de Matemática en la Universidad de Alabama (U. S. A.)

J. D. MANCILL

Profesor y ex Jefe del Departamento de Matemática de la
Universidad de Alabama (U. S. A.)

Volumen 1





Este libro se
escribió para ti
protégelo de
la fotocopia

AEDRA

www.opentor.com

1962, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, Argentina. Esta obra no puede ser reproducida bajo ningún sistema, sin autorización escrita del editor.

ALGEBRA ELEMENTAL MODERNA VOLUMEN I

M.O. González J.D. Mancill

LIBRESA

Murgeón 364 entre Jorge Juan y Ulloa.

P.O. Box 17 - 01 - 356

E-mail: info@libresa.com

Telfs. 2230925 2525581 Fax 2502992

Quito - Ecuador

Cubierta: Felipe Ñacato

Supervisión editorial: Jaime Peña Novoa

Inscripción N° 6085

ISBN. 978 - 9978 - 80 - 134 - 5

Depósito legal N° 371

Cuadragésima primera reimpresión: 13.000 ejemplares

Este libro se acabó de imprimir en los talleres de "Editorial Ecuador F.B.T. Cía. Ltda.", Santiago 367 entre Manuel Larrea y Versalles, Telfs.: 2528 492 2228 636, Fax: (593-2) 2227 551.

Quito, agosto del 2007. E-mail: editecua@interactive.net.ec

PRÓLOGO.

Para ofrecer al público de habla española esta nueva obra, los autores se han esforzado por poner al día el contenido de los cursos tradicionales del Álgebra elemental y por mejorar en varios aspectos su presentación didáctica.

En particular, se ha procurado hacer una exposición metódica, clara y bien ordenada, con suficientes explicaciones al alcance del estudiante, pero con exclusión del verbalismo excesivo y de reiteraciones ampulosas que tienden más bien a confundir que a aclarar.

Se ha puesto particular empeño en que las ilustraciones sean adecuadas y en que, por medio de ejemplos y ejercicios, el alumno pueda advertir la conexión del Álgebra con situaciones de la vida ordinaria, con la Física, la Estadística y otras disciplinas.

Nos hemos esforzado también por que las definiciones sean apropiadas y correctas y por mantener el rigor lógico en los fundamentos y a través de la obra, sin dejar de dar, no obstante, la debida importancia pedagógica a los procedimientos intuitivos e inductivos. Es increíblemente grande el número de definiciones incorrectas y de términos equivocadamente usados en muchos libros de Álgebra. Basta examinar, por ejemplo, las definiciones de sucesión, serie, términos semejantes, radicales semejantes, descomposición en factores, fracción algebraica, número imaginario y muchas otras.

El avance considerable que en los últimos tiempos han experimentado la Física, la Química, la Biología, la Psicología, la Economía y otras ciencias exige imperiosamente una revisión de los cursos actuales del Álgebra. Es inexplicable, por ejemplo, que se definan las potencias con exponentes negativos, y que no se trate en parte alguna de la llamada notación científica ni de las operaciones con números expresados en esa notación, a pesar de su frecuente empleo en Biología y en Física.

He aquí algunos otros temas que el lector hallará suficientemente desarrollados en esta obra: funciones y gráficos, nociones de

estadística, elementos de álgebra financiera, principios fundamentales de la regla de cálculo, papel logarítmico, aplicaciones varias de los logaritmos (aparte de su uso como auxiliar del cálculo), aplicaciones del Álgebra a la Geometría.

Otras muchas innovaciones y mejoras, que sería largo enumerar, no escapan seguramente a la atención de los señores profesores, a los cuales agradecemos por anticipado las observaciones y comentarios que nuestra obra les merezca.

ÍNDICE.

	<u>PÁG.</u>
Prólogo	IX

CAPÍTULO 1

Números naturales, racionales y reales.

1. Números naturales	1
2. Números fraccionarios	2
3. Números irracionales	3
4. Notación literal	5
5. Representación geométrica de los números reales	6
6. Operaciones fundamentales con números reales. Leyes formales de estas operaciones	7
7. Algunas consecuencias sencillas de los axiomas precedentes	10
Test 1	12

CAPÍTULO 2

Números relativos o números con signos.

8. Magnitudes relativas	14
9. Números relativos	16
10. Valor absoluto de un número relativo. Igualdad de números relativos	21
11. Representación geométrica de los números relativos	22
12. Suma de números relativos	24
13. Sustracción de números relativos	31
14. Multiplicación de números relativos	35
15. Potenciación de números relativos	40
16. División de números relativos	44
17. Desigualdad de números relativos	49
18. Uniformidad de las operaciones con números relativos	53
19. Promedio de varios números relativos	54
Test 2	58

CAPÍTULO 3

Técnicismo algebraico.

	Pág.
20. Monomios	59
21. Coeficientes	59
22. Exponentes	60
23. Binomios	61
24. Trinomios	61
25. Polinomios	62
26. Términos	62
27. Términos semejantes	63
28. Reducción de términos semejantes	64
29. Polinomio reducido	65
30. Grado de un monomio	67
31. Grado de un polinomio	68
32. Polinomio homogéneo	69
33. Polinomio ordenado	69
34. Expresiones algebraicas	70
35. Fórmulas	71
36. Valor numérico de una expresión algebraica	73
37. Orden de las operaciones indicadas en una expresión algebraica ...	74
38. Valor numérico de las fórmulas	76
39. Expresiones algebraicas equivalentes. Ecuaciones	77
Test 3	84

CAPÍTULO 4

Adición y sustracción de expresiones algebraicas enteras.

40. Suma de monomios	85
41. Suma de polinomios	86
42. Resta de monomios	90
43. Resta de polinomios	91
44. Sumas o diferencias indicadas. Uso del paréntesis. Supresión de paréntesis	95
45. Introducción de paréntesis	97
46. Otras formas de paréntesis	99
47. Supresión de paréntesis superpuestos	99
48. Suma y resta de expresiones algebraicas enteras con términos complejos	101
49. Suma y resta de polinomios por el método de los coeficientes separados	104
Test 4	107

CAPÍTULO 5

Multiplicación y división de expresiones algebraicas enteras.

	<u>PÁG.</u>
50. Multiplicación de monomios	109
51. Producto de un monomio por un polinomio	111
52. Producto de un polinomio por otro polinomio	111
53. Multiplicación de polinomios por el método de los coeficientes separados	116
54. División de un monomio por otro	118
55. División de un polinomio por un monomio	120
56. División de un polinomio por otro polinomio	121
57. División por el método de coeficientes separados	129
58. Cociente completo	133
Test 5	137

CAPÍTULO 6

Ecuaciones algebraicas sencillas. Problemas.

59. Ecuaciones	139
60. Ecuaciones equivalentes. Transposición de términos	140
61. Resolución de ecuaciones sencillas	143
62. Traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico	146
63. Resolución de problemas	148
Test 6	163

CAPÍTULO 7

Productos y cocientes notables.

64. Productos notables	164
65. Cocientes notables	175
Test 7	178

CAPÍTULO 8

Descomposición en factores

66. Introducción	179
------------------------	-----

	<u>Pág.</u>
67. Factor común	181
68. Agrupamiento	182
69. Trinomios cuadrados perfectos	184
70. Diferencia de dos cuadrados	186
71. Combinación de cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados	188
72. Cuadrados perfectos incompletos	190
73. Trinomios de la forma $x^2 + px + q$	191
74. Trinomios de la forma $mx^2 + px + q$	194
75. Suma de potencias de exponente impar	197
76. Diferencia de potencias de exponente impar	198
77. Suma o diferencia de potencias de exponente par	200
78. Polinomios que contienen factores de la forma $x + a$	201
79. Teorema del resto. Aplicaciones	204
80. Descomposición general en factores de un trinomio de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c$	210
Test 8	215

CAPÍTULO 9

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas enteras.

81. Divisor común y máximo común divisor de expresiones algebraicas enteras	216
82. Determinación del máximo común divisor de varios monomios	217
83. Determinación del máximo común divisor de varios polinomios por descomposición en factores	218
84. Determinación del máximo común divisor de dos polinomios por divisiones sucesivas	219
85. Determinación del máximo común divisor de dos polinomios por suma y resta	222
86. Común múltiplo y mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas enteras	223
87. Determinación del mínimo común múltiplo de varios monomios .	224
88. Determinación del mínimo común múltiplo de varios polinomios por descomposición en factores	225
89. Método general para hallar el mínimo común múltiplo de dos expresiones algebraicas enteras	226
Test 9	228

CAPÍTULO 10

Fracciones algebraicas.

	<u>PÁG.</u>
90. Definiciones	230
91. Principios fundamentales	231
92. Simplificación de fracciones	232
93. Reducción de fracciones al mínimo común denominador	235
94. Adición y sustracción de fracciones	238
95. Expresiones mixtas. Reducción de expresiones mixtas a fracciones y viceversa	243
96. Multiplicación de fracciones	246
97. Potenciación de fracciones	249
98. División de fracciones	249
99. Fracciones complejas	251
100. Evaluación de fracciones. Casos singulares	257
Test 10	267
Ejercicios de repaso de los capítulos 1 a 10	268

CAPÍTULO 11

Ecuaciones fraccionarias.

101. Generalidades	272
102. Principios fundamentales para la resolución de las ecuaciones fraccionarias	272
103. Resolución de ecuaciones fraccionarias	274
104. Problemas	281
105. Ecuaciones literales	293
106. Problemas generales	297
107. Fórmulas	302
Test 11	310

CAPÍTULO 12

Funciones y gráficos.

108. Valores correspondientes. Coordenadas rectangulares	312
109. Constantes y variables	319
110. Funciones	319
111. Algunas funciones sencillas y sus gráficos	323

112.	Variación conjunta. Estudio de la proporcionalidad entre los elementos de una fórmula	330
113.	Gráficos estadísticos	336
—	Test 12	352

CAPÍTULO 13

Sistemas de ecuaciones de primer grado.

114.	Definiciones	355
115.	Método de adición y sustracción	357
116.	Método de sustitución	361
117.	Método gráfico	363
118.	Sistemas de ecuaciones fraccionarias	368
119.	Sistemas de ecuaciones con coeficientes literales	372
120.	Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas	375
121.	Resolución por el método de los determinantes	381
122.	Problemas	391
—	Test 13	407
—	Ejercicios de repaso de los capítulos 11 a 13	409
—	Respuestas a los ejercicios	412

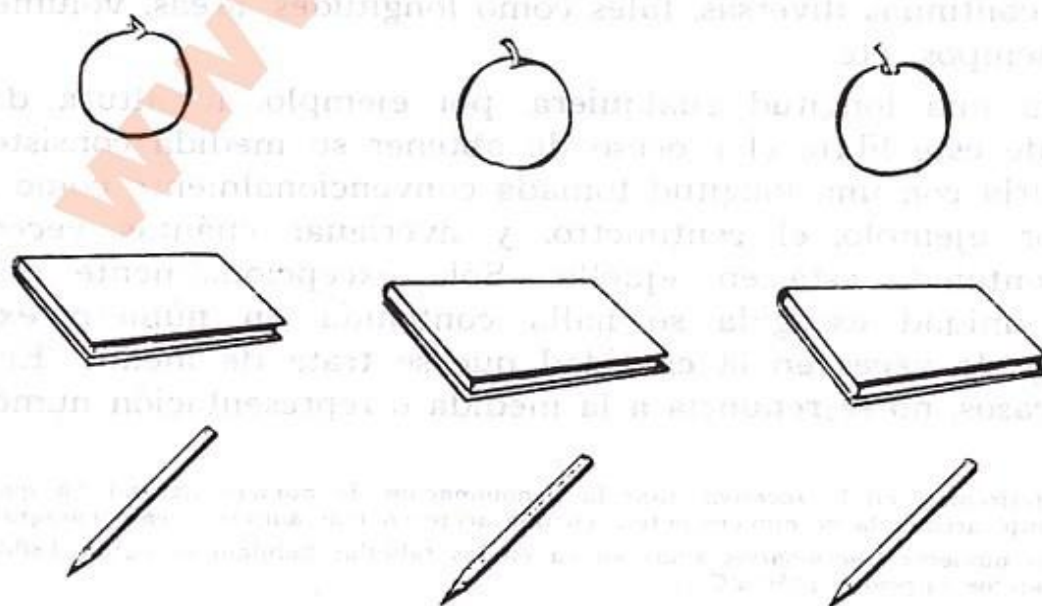
CAPÍTULO 1.

NÚMEROS NATURALES RACIONALES Y REALES.

En este capítulo intentaremos precisar los conceptos del número que sucesivamente son objeto de estudio en la Aritmética elemental, y resumiremos las propiedades fundamentales de las operaciones a que estos números se someten. Esas propiedades, que son, en su mayoría, comunes a los distintos tipos de números, adquieren una importancia de primer orden en el Álgebra. En esta rama de la Matemática se desarrolla un cálculo de validez general, aplicable a cualquier tipo especial de número, (entero, fraccionario, etc.). Sólo en ciertos asuntos interesa la naturaleza del número que se utiliza, como veremos oportunamente.

1. Números naturales.

Cuando una persona advierte que un conjunto de naranjas, un conjunto de libros y un conjunto de lápices, como los representados en la figura, a pesar de sus diferencias físicas, tienen algo en



común, adquiere el concepto fundamental del número natural o número entero * (del número tres en el caso del ejemplo 1).

Conjuntos como los que hemos mencionado, cuyos elementos se pueden poner en correspondencia simple, como muestra la figura, esto es, de modo que a cada elemento de un conjunto corresponda un solo elemento en el otro y viceversa, se llaman *equivalentes* (o coordinables).

La noción de número natural resulta de la consideración de conjuntos equivalentes; en otros términos, el número es el concepto que se adquiere cuando en los conjuntos equivalentes se prescinde de la naturaleza de sus objetos, de su orden, etc.

La mente humana ha creado símbolos para representar la característica común de distintas clases de conjuntos equivalentes. Así el símbolo 1 (uno) representa el número que corresponde a todos los conjuntos equivalentes al conjunto típico (A); el símbolo 2 (dos) representa el número que corresponde a todos los conjuntos equivalentes al (A, B); el símbolo 3 (tres) representa el número que corresponde a todos los conjuntos equivalentes al (A, B, C,) y así sucesivamente. Ocasionalmente, se usan otros símbolos para representar los mismos números como I, II, III, IV, ... de la numeración romana.

2. Números fraccionarios.

Los números fraccionarios, tales como $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$ y $\frac{9}{10} = 0,9$, fueron introducidos desde tiempos remotos** con el propósito de medir, o sea, de representar numéricamente las cantidades de magnitudes continuas diversas, tales como longitudes, áreas, volúmenes, pesos, tiempos, etc.

Dada una longitud cualquiera, por ejemplo, la altura de la página de este libro, el proceso de obtener su medida consiste en compararla con una longitud tomada convencionalmente como unidad, por ejemplo, el centímetro, y averiguar cuántas veces se halla contenida ésta en aquélla. Sólo excepcionalmente resulta que la unidad escogida se halla contenida un número exacto (entero) de veces en la cantidad que se trata de medir. En los demás casos, no se renuncia a la medida o representación numérica

* Preferiremos, en lo sucesivo, usar la denominación de número natural ya que más adelante emplearemos la de número entero en una acepción más amplia (véase parágrafo 9).

** Los números fraccionarios aparecen ya en las tablillas babilónicas (2000-1800 a.C.) y en los papiros egipcios (1650 a.C.).

de la cantidad, sino que subdividiendo convenientemente la unidad elegida se investiga si una de estas subunidades se halla contenida exactamente en la cantidad. Esto se logra en la práctica escogiendo una subunidad suficientemente pequeña. Sin embargo, como veremos en el párrafo siguiente, no siempre es ello posible teóricamente cuando se trata de magnitudes geométricas. La medida o representación de las cantidades exige (desde el punto de vista práctico) el conocimiento de dos números enteros: uno que indique las partes en que se ha subdividido la unidad fundamental (**denominador**) y otro que indique las veces que esta subunidad cabe en la cantidad que se trata de representar (**numerador**). El conjunto de estos dos números enteros constituye el número fraccionario. Se conserva la denominación de *número* para estos *pares de* enteros porque, como ya se ha visto en Aritmética, con estos pares se pueden definir operaciones de suma, multiplicación, etc., con propiedades enteramente análogas a las de las operaciones correspondientes con números naturales, las cuales incluyen a éstas como casos particulares.

Ejemplo. El número fraccionario de numerador 3 y denominador 4 se puede representar por medio de una cualquiera de las notaciones siguientes:

$$(3, 4), \quad \frac{3}{4}, \quad 3/4.$$

Desde el punto de vista puramente aritmético (sin hacer referencia al problema de la medida de las magnitudes), se puede considerar el número fraccionario como un ente aritmético que se introduce con el propósito de hacer posible la operación de división en todos los casos (excepto cuando el divisor es cero).

Ejemplo.

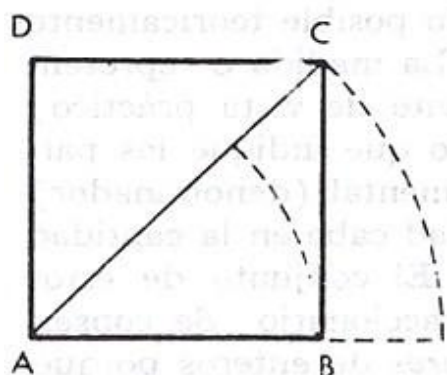
$$2 : 5 = \frac{2}{5}.$$

Se usa la denominación de *número racional* para designar indistintamente un número natural o un número fraccionario.

3. Números irracionales.

Se debe a los griegos (Pitágoras, 540 a. C.; Euclides, 300 a. C.), la introducción de los números irracionales, tales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\pi = 3,14159\dots$

La existencia de ciertas longitudes geométricas llamadas *inconmensurables* condujo a la consideración de los números irracionales (o inconmensurables). Dos segmentos de recta se llaman *inconmensurables entre sí* cuando no existe ningún número natural o



fraccionario que exprese exactamente la medida de uno de ellos cuando se toma el otro por unidad.

Tal es el caso de la diagonal AC del cuadrado con respecto al lado AB de la figura. AB no se halla contenida un número entero de veces en AC, y se puede probar que ninguna subunidad de AB (una mitad, una tercera, una décima, etc.) cabe un número exacto de veces en AC. No existe, pues, ningún número racional que exprese la medida de AC cuando se toma el lado AB por unidad.

La introducción del número irracional $\sqrt{2}$ resuelve en este caso la dificultad, pues se tiene

$$AC = \sqrt{2} AB$$

de modo que $\sqrt{2}$ expresa la medida de AC cuando se toma el lado AB por unidad.

Los números racionales y los irracionales se designan conjuntamente con la denominación de *números reales*.

Tanto los números racionales como los irracionales pueden ser representados por medio de expresiones decimales con infinitas cifras.

Ejemplos.

$$\frac{1}{3} = 0,3333\dots$$

$$\frac{5}{6} = 0,8333\dots$$

$$\frac{2}{5} = 0,4000\dots$$

$$2 = 2,0000\dots$$

$$\sqrt{2} = 1,4142\dots$$

$$\sqrt{3} = 1,7320\dots$$

$$\sqrt[3]{5} = 1,7099\dots$$

$$\pi = 3,1415\dots$$

Se puede hacer uso de la representación decimal para introducir aritméticamente los números reales, utilizando la periodicidad o no periodicidad de las cifras decimales para clasificarlos en racionales e irracionales.

Diremos pues:

*Todo número decimal con infinitas cifras define un número real. Si estas cifras son periódicas el número es racional, si no son periódicas el número es irracional.**

Observaremos, por último, que todo número irracional puede ser aproximado tanto como se quiera por un número racional. Así, por ejemplo, 1,41 difiere de $\sqrt{2}$ en menos de una centésima y 1,4142 difiere de $\sqrt{2}$ en menos de una diezmilésima; 3,1416 es una aproximación por exceso de π que se diferencia de este número en 0,00000734..., es decir, en menos de una cienmilésima.

4. Notación literal.

Hay multitud de propiedades numéricas que son siempre válidas, cualesquiera sean los números a que se apliquen. Se tiene, por ejemplo,

$$2 + 3 = 3 + 2, \quad \frac{4}{5} + \frac{2}{7} = \frac{2}{7} + \frac{4}{5},$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{3}, \quad \text{etc.}$$

Esto ilustra la conocida ley conmutativa de la suma, a saber: la suma de dos números es independiente del orden en que se consideren los sumandos. Si el primer sumando se representa por la letra a y el segundo por la letra b , dicha propiedad puede expresarse de una manera muy concisa y general escribiendo

$$a + b = b + a.$$

El empleo de las letras para representar números es frecuente en la Aritmética, v. gr., cuando se escribe una proporción en la forma

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

o se expresa la regla del interés simple mediante la fórmula

$$i = \frac{crt}{100}$$

* Para que esta definición comprenda todos los números es necesario expresar los números enteros, y los decimales exactos, con infinitas cifras, agregando infinitos ceros decimales, como hemos indicado en algunos ejemplos anteriores.

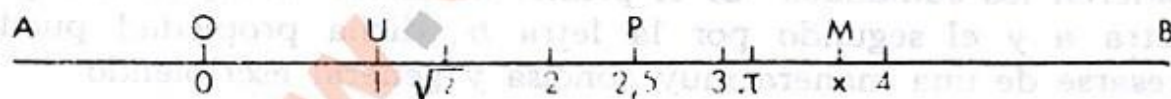
pero en el Álgebra el uso de los símbolos literales es mucho más importante y característico. Esto ha dado lugar al desarrollo del llamado cálculo algebraico, cuyas fórmulas literales tienen validez general, esto es, se cumplen cualesquiera sean los números particulares con que se sustituyan esas letras.* En este sentido el Álgebra (elemental) se confunde con la Aritmética universal, esto es, con el estudio de las propiedades generales de los números y de sus operaciones.

Observación. Por brevedad, en lo sucesivo diremos frecuentemente *el número a* , en vez de *el símbolo numérico a* , o de *el número representado por a* .

En el Álgebra llamada moderna o abstracta se estudia la teoría general de las operaciones y en ella los símbolos literales no representan números necesariamente, pudiendo representar también movimientos, sustituciones, transformaciones, etc. En general, la naturaleza de los elementos representados no interesa en el Álgebra moderna sino las relaciones que se establecen entre ellos, y de ahí el calificativo de *abstracta*.

5. Representación geométrica de los números reales.

Los números reales se pueden representar geoméricamente mediante los puntos de una semirrecta. Para ello se toma sobre una recta cualquiera AB (v. fig.), un punto O arbitrario (llamado en lo sucesivo *el origen*), y con un segmento u , elegido también



arbitrariamente como unidad de medida, se marca, en cualquiera de las dos porciones en que el punto O divide la recta AB (es decir, en cualquiera de las dos semirrectas de origen O), el punto U situado a la unidad de distancia del origen (o sea, tal que $OU = u$). A este punto U se le asigna el número 1 y al origen O el número 0. A cualquier otro punto P de la semirrecta OB se asocia la medida del segmento OP con la unidad u . Por ejemplo, si $OP = 2.5u$, se asigna al punto P el número 2,5. Y se dice que este número es la *abscisa* del punto P .

Si x es la abscisa del punto M , este número representa la medida del segmento OM en relación con la unidad escogida u .

* Con determinadas excepciones en ciertos casos. Por ejemplo, no se puede atribuir valores a las letras que anulen algún denominador.

En la figura están marcadas también las abscisas de otros puntos de la semirrecta OB.

Admitiremos que a todo punto M de OB corresponde un número real (racional o irracional) y sólo uno. Y que, recíprocamente, a cada número real corresponde un punto y sólo uno de la semirrecta OB.

EJERCICIO 1.

1º) Marcar arbitrariamente sobre una recta los puntos correspondientes a los números 0 y 1. A continuación señalar sobre la misma recta los puntos correspondientes a los siguientes números:

a) 3

d) 2,4

g) $\frac{7}{2}$

b) 5

e) $\frac{10}{3}$

h) $\sqrt{5}$

c) 1,5

f) $\sqrt{3}$

i) $\frac{14}{3}$

2º) En la semirrecta de la figura se ha tomado $OU = 1$ cm. Utilizando



una regla graduada en centímetros y milímetros determinar aproximadamente las abscisas de los puntos A, B, C, D y E.

3º) Dar varios procedimientos que permitan determinar una infinidad de números reales tan próximos como se quiera a un número real dado, v. gr., el número 5. (Por ejemplo, la expresión $5 + (0,1)^n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ proporcionaría los números 5,1; 5,01; 5,001; ... etc.)

Escoger una unidad apropiada, y señalar algunos de los valores hallados sobre la recta.

6. Operaciones fundamentales con números reales. Leyes formales de estas operaciones.

Las operaciones fundamentales con números reales son las de *suma* y *multiplicación*. Se llaman así porque todas las demás operaciones (sustracción, división, potenciación, etc.) pueden definirse fácilmente en términos de la suma y de la multiplicación. No trataremos de definir estas operaciones fundamentales, ni tampoco nos ocuparemos de cómo se efectúan en la práctica, o sea, cómo se obtiene el número suma o el producto, que son cuestiones ya tratadas más o menos ampliamente en Aritmética, sino que estudiaremos las leyes o propiedades de esas operaciones que son

independientes de los números particulares que en ellas se consideren y que, por tal motivo, se llaman *formales*. Enunciaremos esas propiedades en calidad de *axiomas*, esto es, como principios no demostrables, y consideraremos el conjunto de ellos como una definición *indirecta* de los números reales y de las operaciones fundamentales con estos números.

Las leyes formales son de fundamental importancia en el desarrollo del Álgebra.

La notación $a = b$ significa que los símbolos a y b representan el mismo número real; $a \neq b$ significa que a y b representan números reales distintos.

I. AXIOMAS DE LA IGUALDAD.

6-1. Carácter idéntico.

$$a = a.$$

6-2. Carácter recíproco.

$$\text{Si } a = b, \text{ entonces } b = a.$$

6-3. Carácter transitivo.

$$\text{Si } a = b \text{ y } b = c, \text{ entonces } a = c.$$

II. AXIOMAS DE LA SUMA O ADICIÓN.

6-4.

De los números a y b resulta por adición un número s (llamado *suma*), lo cual se expresa así:

$$s = a + b.$$

6-5. Ley uniforme.

El número suma de otros dos es *único*; esto es, si $a = b$ y $c = d$, entonces

$$a + c = b + d.$$

6-6. Ley conmutativa.

$$a + b = b + a.$$

6-7. Ley asociativa.

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

6-8. Ley de la identidad o del módulo.

Existe un número y sólo uno, el cero (0), tal que:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

cualquiera sea a .

El 0 recibe el nombre de *elemento idéntico* o *módulo* de la suma.

III. AXIOMAS DE LA MULTIPLICACIÓN.

6-9.

De los números a y b resulta por multiplicación un número p (llamado producto), lo cual se expresa así:

$$p = ab \text{ o bien } p = a \cdot b.$$

6-10. *Ley uniforme.*

El producto de dos números es *único*; esto es, si $a = b$ y $c = d$, entonces

$$ac = bd.$$

6-11. *Ley conmutativa.*

$$ab = ba.$$

6-12. *Ley asociativa.*

$$(ab)c = a(bc).$$

6-13. *Ley de la identidad o del módulo.*

Existe un número y sólo uno, el uno (1), tal que:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

cualquiera sea a .

El 1 recibe el nombre de *elemento idéntico* o *módulo* del producto.

6-14. *Ley distributiva.*

$$a(b + c) = ab + ac.$$

6-15. *Existencia del inverso.*

A todo número real $a \neq 0$ corresponde un número real *único* x tal que

$$ax = 1.$$

Este número x se llama el *inverso* o *recíproco* de a y suele representarse por $1/a$.

IV. AXIOMAS DE ORDEN

Definición. Si a y b son dos números reales tales que a es la suma $b + d$, formada por los sumandos b y un número natural $d \neq 0$, se dice que a es *mayor* que b y se escribe

$$a > b.$$

También se dice que b es *menor* que a , y se escribe

$$b < a.$$

6-16. *Ley de tricotomía.*

Dados dos números reales a y b una y sólo una de las relaciones siguientes tiene lugar

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

por lo cual se dice que las relaciones simbolizadas por $=$, $>$, $<$ se completan y se excluyen.

6-17. *Ley de monotonía de la suma.*

Si $a > b$ se tiene $a + c > b + c$.

6-18. *Ley de monotonía de la multiplicación.*

Si $a > b$ y $c > 0$ se tiene $ac > bc$.

V. AXIOMA DE CONTINUIDAD.

6-19.

Si A y B son dos conjuntos de números reales tales que todo número de A sea menor que todo número de B , existe un número real c tal que

$$a \leq c \leq b$$

para todo número a contenido en A y todo número b contenido en B . El símbolo $\leq$ significa: *menor o igual que*. Análogamente, $\geq$ significa: *mayor o igual que*.

7. Algunas consecuencias sencillas de los axiomas precedentes.

7-1. *Ley de cancelación de la suma.*

Si $a + c = b + c$ resulta $a = b$.

En efecto, si fuese, por ejemplo, $a > b$, sumando c en ambos miembros obtendríamos, según 6-17, $a + c > b + c$, en contradicción con la hipótesis.

7-2. *Ley de cancelación del producto.*

Si $ac = bc$ y $c \neq 0$, resulta $a = b$.

La demostración es análoga a la anterior.

7-3.

Si $a + d = b$, se llama d la *diferencia* entre b y a y se escribe $d = b - a$.

Sólo hay un número d que cumple la condición $a + d = b$, pues si hubiera otro d' tal que $a + d' = b$, resultaría $a + d = a + d'$ y, en virtud de 7-1, se deduce $d = d'$.

Como consecuencia de 6-8 se tiene $0 = a - a$.

7-4.

Teniendo en cuenta 6-10 y 6-14 se obtiene:

$$\begin{aligned} (a + d)x &= bx, \\ ax + dx &= bx, \\ \text{luego} \quad dx &= bx - ax, \\ \text{o bien} \quad (b - a)x &= bx - ax. \end{aligned}$$

Esta es la *ley distributiva* para la diferencia.

7-5.

$$0 \cdot b = 0.$$

En efecto, $0 \cdot b = (a - a)b = ab - ab = 0$, en virtud de 7-3 y 7-4.

7-6.

Si $ab = 0$ y $a \neq 0$, entonces $b = 0$.

En efecto, $ab = 0$ se puede escribir

$$ab = a \cdot 0,$$

y aplicando la ley de cancelación 7-2 resulta

$$b = 0.$$

Por tanto, el producto de dos números reales no puede ser nulo sin serlo al menos uno de los factores.

7-7.

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$ (carácter transitivo de la desigualdad).

En efecto, $a > b$ significa

$$a = b + h$$

siendo h un número real diferente de cero. Análogamente, $b > c$ significa

$$b = c + k, \quad k \neq 0.$$

Por tanto,

$$a = (c + k) + h = c + (k + h)$$

en virtud de 6-7. Esta última igualdad nos dice que

$$a > c.$$

Nótese que siendo $h = 0 + h$ resulta $h > 0$; análogamente, $k > 0$. En virtud de 6-17 se tiene, pues, $h + k > k$; luego $h + k$ no puede ser cero, ya que resultaría $0 > k$ que contradice $k > 0$.

Es decir, la suma de dos números reales diferentes de cero es un número real diferente de cero.

7-8.

Si $a \neq 0$ sólo hay un número x tal que $ax = b$.

Este número x recibe el nombre de *cociente* de b por a .

En efecto, multiplicando ambos miembros por el recíproco $1/a$ de a (6-15) se obtiene

$$\frac{1}{a} ax = \frac{1}{a} b \quad \text{ó} \quad x = \frac{1}{a} b.$$

El cociente de b por a suele indicarse escribiendo $\frac{b}{a}$ ó b/a .

Si $b \neq 0$, la división por 0 es imposible, ya que $0 \cdot x = b$ implica $b = 0$, que contradice el supuesto $b \neq 0$.

No puede haber otro número $x' \neq x$ tal que $ax' = b$ pues comparando con $ax = b$ resultaría $ax = ax'$ y, en virtud de 7-2, $x = x'$.

Todas las propiedades anteriores son conocidas de la Aritmética vulgar, pero hemos querido mostrar en algunos casos sencillos cómo pueden deducirse fácilmente de los axiomas enumerados en 6.

EJERCICIO 2.

Utilizando los axiomas y las propiedades establecidas en 7, demostrar las siguientes igualdades:

1º) $(b + c)a = ba + ca$

2º) $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$

3º) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

4º) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

5º) Si $a > b$ y $c > d$ demostrar que $a + c > b + d$ y que $ac > bd$.

TEST 1

1º) Si $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ decir si m es:

- a) racional b) irracional c) natural

2º) Si $m = 3,27272\dots$ decir si m es:

- a) racional b) irracional c) natural

3º) La igualdad $(ab)c = a(bc)$ expresa una de las leyes formales de la multiplicación. Diga cuál de las siguientes es:

- a) conmutativa b) distributiva c) asociativa d) monotonía

4º) Diga qué leyes formales se utilizan en las igualdades siguientes:

$$(b + c)a = a(b + c) = ab + ac.$$

5º) Si $a < b$ y $b < c$ demostrar que $a < c$.

CAPÍTULO 2.

NÚMEROS RELATIVOS O NÚMEROS CON SIGNOS.

La consideración de los números relativos o con signos ha surgido como una cuestión de conveniencia, principalmente con objeto de poder representar adecuadamente las magnitudes cuyas cantidades son susceptibles de agruparse en dos categorías, o de ser consideradas en sentidos opuestos. Son muchas las magnitudes de este tipo, llamadas *magnitudes relativas*, que se presentan en la vida corriente, en el campo de la Física y en otras disciplinas científicas.

Por otra parte, en el conjunto de los axiomas que caracterizan los números reales, parágrafo 6, hay una evidente falta de simetría, pues no existe en el grupo II ningún axioma correspondiente al 6-15 del grupo III (existencia del inverso). Este axioma conduce a la posibilidad de la división en todos los casos, excepto cuando el divisor es cero, como vimos en 7-8. Bastaría introducir en el grupo II (axiomas de la suma) el análogo de 6-15 para definir un *contrario* u *opuesto* de cada número real a , lo que conduciría inmediatamente a la posibilidad de efectuar la sustracción en todos los casos (no solamente cuando el minuendo es mayor o igual que el sustraendo), como veremos en este capítulo.

8. Magnitudes relativas.*

Como ya hemos indicado, se llaman *magnitudes relativas* aquellas cuyas cantidades o estados particulares se clasifican en dos categorías distintas, las cuales se dicen opuestas, o de sentidos opuestos.

* Recordaremos que, en su acepción más general, se llaman *magnitudes* aquellos conceptos abstractos (como la longitud, el área, la temperatura, el peso) entre cuyos estados particulares o cantidades pueden definirse la igualdad y la desigualdad. En cambio no son magnitudes, según la definición anterior, la bondad, la inteligencia, el amor, etc.

Ejemplos.

1) Las fuerzas opuestas que actúan en un punto se clasifican en *acciones y reacciones*.

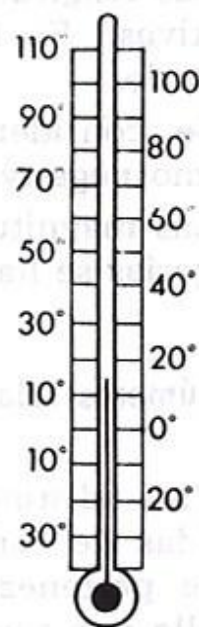


2) Las temperaturas centígradas se clasifican en *temperaturas sobre cero* y *temperaturas bajo cero*, según que la columna de mercurio esté por arriba o por debajo de la marca que indica la temperatura del hielo fundente (la cual se ha tomado convencionalmente como cero de la escala).

Así, por ejemplo, se habla de 15° de temperatura sobre cero; de 4° de temperatura bajo cero, etc.

3) Las latitudes geográficas se clasifican en *norte* y *sur*. Cuando se da la latitud de un barco en alta mar, no basta decir que está a 10° de latitud sino que hay que especificar si se trata de latitud norte o de latitud sur.

4) Las longitudes geográficas se clasifican en *este* y *oeste*. Así, por ejemplo, la longitud de París (con respecto al meridiano de Greenwich) es $2^{\circ} 20' 14''$ E y la de Chicago es $87^{\circ} 37' 37''$ O.



5) En las cuentas corrientes los saldos se clasifican en *deudor* y *acreedor*.

6) Las horas del día en algunos países es frecuente el dividirlas en *antes del meridiano* y *pasado el meridiano*. Así, por ejemplo, se dice 11 a.m. y 1 p.m. en vez de las 13 h.

7) Las fechas, según la cronología cristiana, se dividen en *antes de Cristo* (a.C.) y *después de Cristo*

(d. C.). Así, por ejemplo, decimos que la erupción del Vesubio que sepultó a Pompeya ocurrió en el año 79 d. C.

Para las magnitudes relativas se ha generalizado una terminología uniforme, según la cual se llaman *positivas* las cantidades agrupadas en una cualquiera de las clases (elegida arbitrariamente), y *negativas* las agrupadas en la otra. La cantidad nula se considera como frontera de separación entre ambas clases.

Las cantidades pertenecientes a clases distintas se dicen *opuestas*.

Las latitudes norte se consideran positivas; las latitudes sur, negativas.

Las longitudes este se consideran positivas; las longitudes oeste, negativas. Es frecuente, sin embargo, que se adopte el convenio contrario.

Se consideran como positivas las temperaturas sobre cero; y como negativas las temperaturas bajo cero.

Las magnitudes cuyas cantidades no se clasifican en grupos o categorías se llaman *absolutas*. Ejemplos: los volúmenes, las masas.

9. Números relativos.

Para distinguir las medidas de cantidades positivas de las medidas de cantidades negativas, cualquiera que sea la magnitud a que pertenezcan, es conveniente utilizar un distintivo único y sencillo que sustituya los varios signos N, S, E, O, a. m., p. m., a. C., d. C., y las frases: deudor, acreedor, sobre cero, bajo cero, etc.

Con este propósito se han elegido los signos $+$ y $-$, y así se dice, por ejemplo, latitud $+ 20^\circ$, longitud $- 50^\circ$, saldo $+ 300$ pesos, temperatura $- 6^\circ$, año $+ 79$.

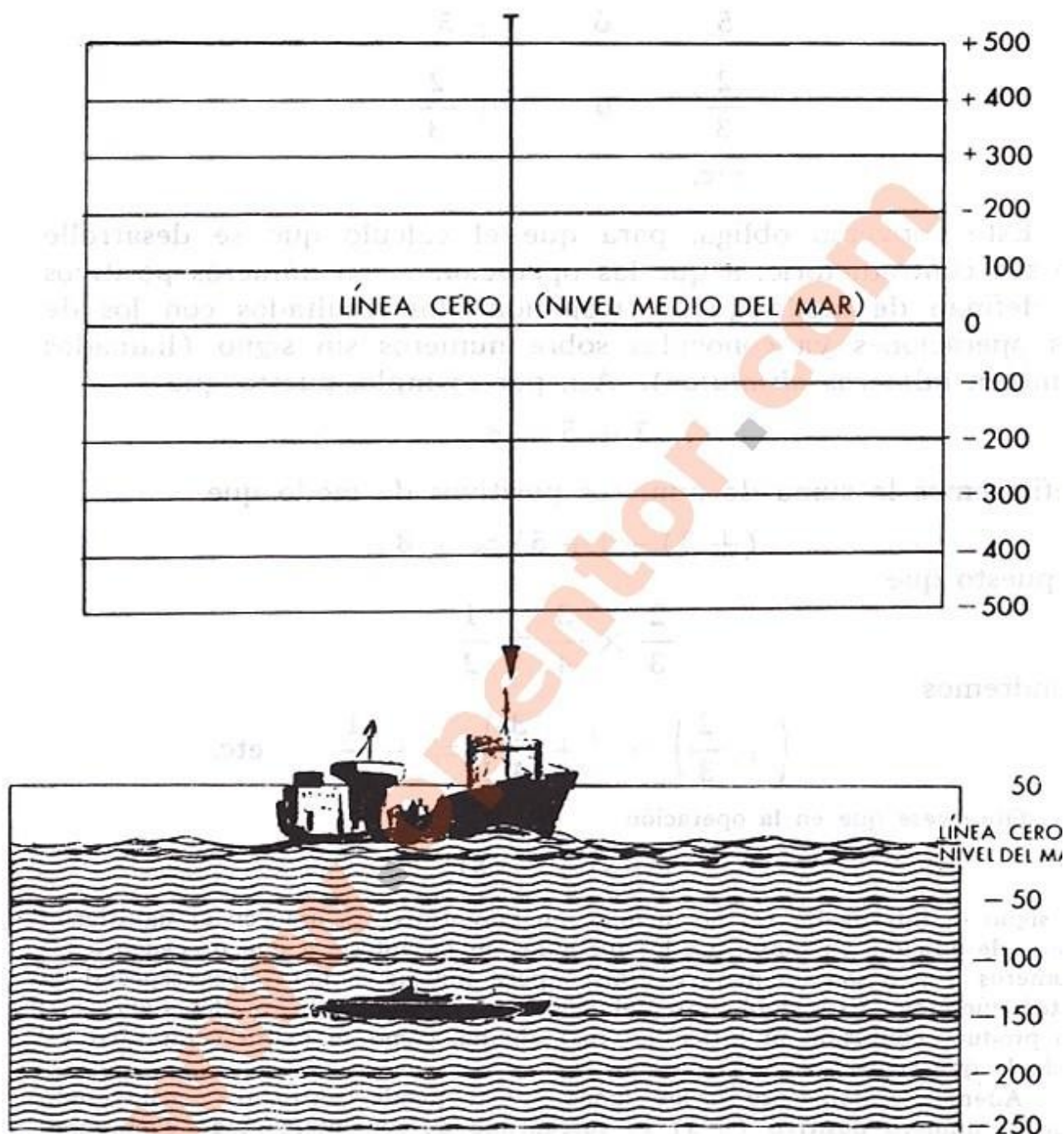
Todo número real precedido del signo $+$ se llama *número real positivo*. Si tiene antepuesto el signo $-$ se llama *negativo*. El número 0 se considera como un elemento de separación entre los números positivos y negativos y no se le atribuye signo alguno.

Ejemplos.

Son números positivos: $+ 3$; $+ 2,5$; $+ \sqrt{2}$;

Son números negativos: $- 5$; $- 3,3$; $- \sqrt{2}$;

Véase el ejemplo gráfico de las figuras siguientes:



Un submarino a 150 pies bajo el nivel del mar
(- 150 pies).

Está justificado llamar *números* a estos nuevos símbolos, pues, como veremos en seguida, es posible definir con ellos la suma, multiplicación y demás operaciones aritméticas, de modo que la mayor parte de las leyes formales de las operaciones continúen verificándose.

Con objeto de que los números reales sin signo queden incluidos

en el sistema de los números relativos, convendremos en equipararlos a los positivos. Así, escribiremos indistintamente

$$\begin{array}{ccc} 5 & \text{ó} & + 5 \\ \frac{2}{3} & \text{ó} & + \frac{2}{3} \\ \text{etc.} \end{array}$$

Este convenio obliga, para que el cálculo que se desarrolle no sea contradictorio, a que las operaciones con números positivos se definan de modo que correspondan los resultados con los de las operaciones ya conocidas sobre números sin signo (llamados también *números absolutos*). Así, por ejemplo, puesto que

$$3 + 5 = 8$$

definiremos la suma de números positivos de modo que

$$(+3) + (+5) = +8;$$

y puesto que

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

pondremos

$$\left(+\frac{2}{3}\right) \times \left(+\frac{3}{4}\right) = +\frac{1}{2} \quad \text{etc.}$$

Obsérvese que en la operación

$$(+3) + (+5)$$

el signo $+$ intermedio (el no incluido en paréntesis) se usa con el significado usual de adición, en tanto que los incluidos en paréntesis y que preceden a los números 3 y 5 son un mero distintivo para indicar la naturaleza especial de estos números. Este doble uso del signo $+$ (y análogamente del signo $-$), no produce confusión ni dificultad real alguna, como se podrá comprobar en todo lo que sigue.

Además, el doble uso de los signos $+$ y $-$ puede justificarse considerando que el número positivo $(+3)$ es susceptible de ser interpretado como operación de sumar al cero el número absoluto 3; y el número negativo (-3) como operación de restar el número absoluto 3 de cero, es decir,

$$(+3) = 0 + 3$$

$$(-3) = 0 - 3$$

o bien

$$(+3) = +3$$

$$(-3) = -3$$

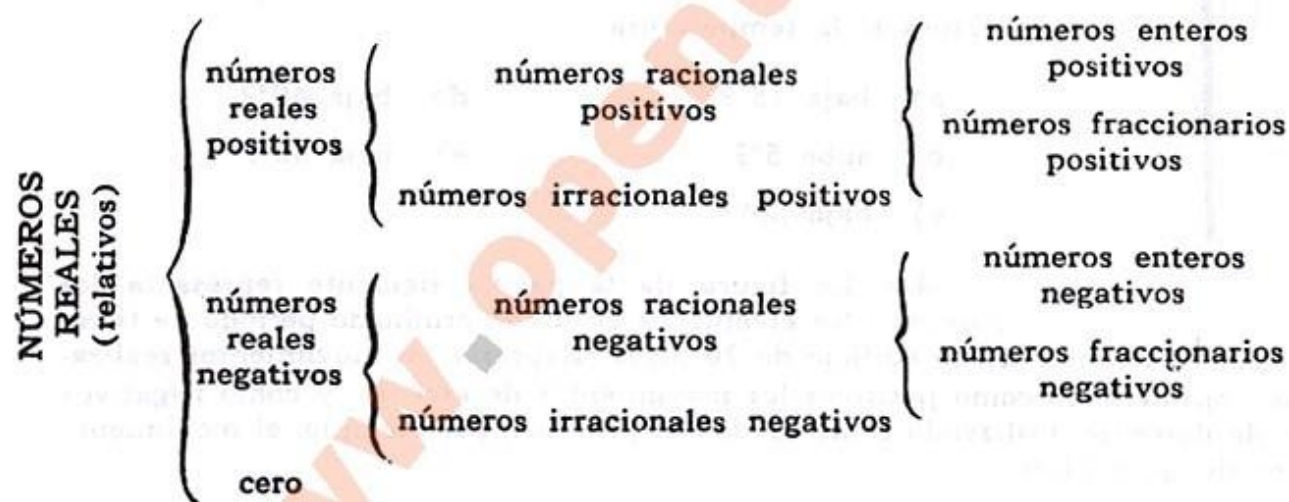
omitiendo la escritura del cero por brevedad.

Convendremos en ampliar el significado de los términos *número real*, *número irracional*, *número racional* y *número fraccionario* de modo que estas denominaciones incluyan, indistintamente, los correspondientes números positivos y negativos. Así, por ejemplo, diremos que $+\frac{2}{3}$ es un número fraccionario positivo, en tanto que $-\frac{3}{4}$ es un número fraccionario negativo. Análogamente, diremos que $+\sqrt{2}$ es un número irracional positivo, en tanto que $-\sqrt{2}$ es un número irracional negativo.

En cuanto a la denominación de *número natural* no se sigue la misma regla, sino que se dirá ahora *número entero*, positivo o negativo, según el signo que le preceda. Por ejemplo, $+8$ es un número entero positivo, y -5 es un número entero negativo.

La denominación de número natural se reserva exclusivamente para los enteros desprovistos de signo o absolutos. Ejemplo: el número 4.

He aquí un cuadro que aclara las relaciones entre los distintos tipos de números que hemos considerado:

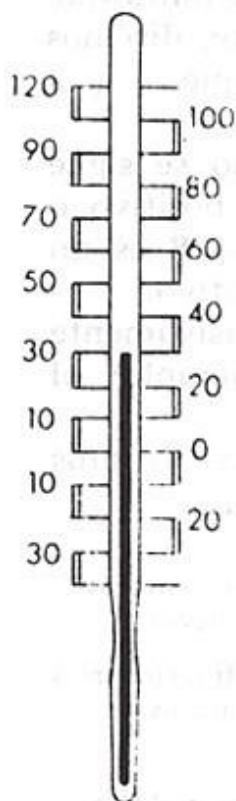


EJERCICIO 3.

1º) Decir qué clase de números son los siguientes. Indíquese solamente la categoría menos amplia a que pertenece el número. Ejemplo: $-\frac{2}{3}$ es fraccionario negativo y, por tanto, racional negativo y real negativo. De acuerdo con lo que se advierte, la respuesta correcta en este ejemplo es: $-\frac{2}{3}$ es un número fraccionario negativo.

- | | | | |
|--------------------|-------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) $+3$ | b) $-\frac{1}{2}$ | c) $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ | d) 5 |
| e) $+2\frac{1}{5}$ | f) $+\sqrt{6}$ | g) $-4,1$ | h) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| | | | i) -7 |

2º) En el cuadro siguiente se dan las latitudes y longitudes aproximadas en grados de algunas ciudades importantes. Copiar de nuevo este cuadro usando el signo + para indicar las latitudes norte, el signo - para las latitudes sur; el signo + para las longitudes este y el signo - para las longitudes oeste.



CIUDAD	LATITUD	LONGITUD
Boston	42° N	71° O
Buenos Aires	35° S	58° O
El Cabo	34° S	18° E
El Cairo	30° N	32° E
Estocolmo	59° N	18° E
Lima	12° S	77° O
Madrás	13° N	80° E
Melbourne	38° S	145° E
París	49° N	2° E
San Francisco	38° N	122° O

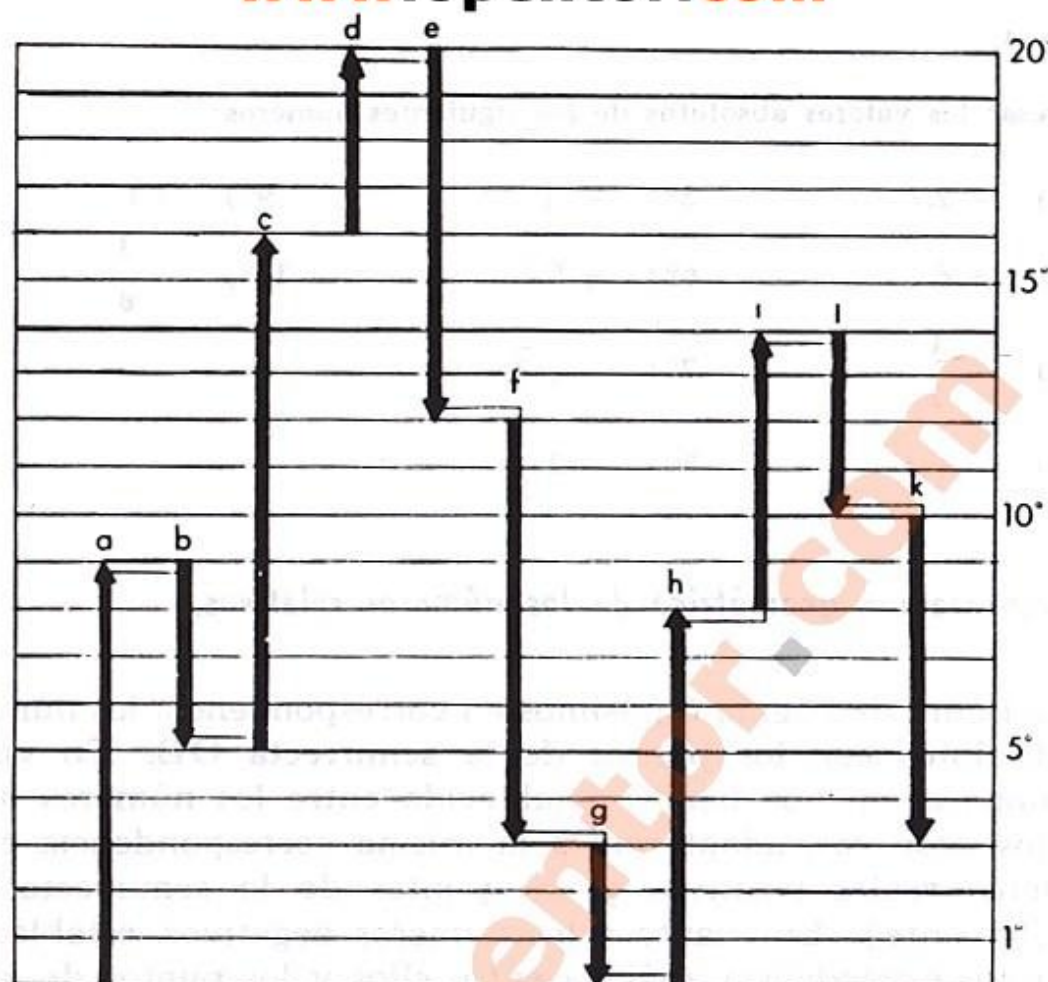
3º) El termómetro representado en la figura marca una temperatura de 30° sobre cero ó + 30°. ¿Cuál será la lectura si la temperatura

- a) baja 15°?
- b) sube 5°?
- c) baja 30°?
- d) baja 40°?
- e) baja 50°?

4º) La figura de la página siguiente representa los movimientos efectuados en un determinado período de tiempo por el ascensor de un edificio de 20 pisos. Expresar los movimientos realizados, considerando como positivos los movimientos de ascenso, y como negativos los de descenso, utilizando como unidad el piso; así, por ejemplo, el movimiento d es de + 4 pisos.

5º) En el cuadro siguiente se representan las ventas de un empleado de comercio durante una semana en comparación con las de la anterior. Señalar los aumentos de venta con el signo + y las disminuciones con signo -, como se hace en las dos primeras columnas.

	<i>lunes</i>	<i>martes</i>	<i>miércoles</i>	<i>jueves</i>	<i>viernes</i>	<i>sábado</i>
Semana ant.	5 314,20 \$	5 216,40 \$	5 008,10 \$	5 180,60 \$	5 200,00 \$	5 420,50 \$
Última sem.	5 210,50	5 326,20	5 115,60	5 120,30	5 250,40	5 510,10
Diferencias	+ 103,70	- 109,80	?	?	?	?



10. Valor absoluto de un número relativo. Igualdad de números relativos.

Se llama *valor absoluto* de un número relativo al número que resulta prescindiendo del signo. Así, por ejemplo, el valor absoluto de -5 es 5 , y el valor absoluto de $+\frac{2}{3}$ es $\frac{2}{3}$.

El valor absoluto de un número relativo suele indicarse escribiendo éste entre dos barras verticales, v. gr. $|-5|$.

Ejemplos.

$$|+7| = 7$$

$$|-9| = 9$$

$$|-\pi| = \pi.$$

Completaremos la definición anterior agregando que el valor absoluto de 0 es 0 , es decir, $|0| = 0$.

Dos números relativos se dicen *iguales* (o uno mismo) cuando tienen igual valor absoluto y el mismo signo. La notación $a = b$, llamada *igualdad*, expresa que los símbolos a y b representan el mismo número relativo.

EJERCICIO 4.

Expresar los valores absolutos de los siguientes números:

1º) $-2,2$

5º) $+\pi$

9º) -1

2º) $+8$

6º) $+0,5$

10º) $-\frac{3}{8}$

3º) $-\frac{1}{2}$

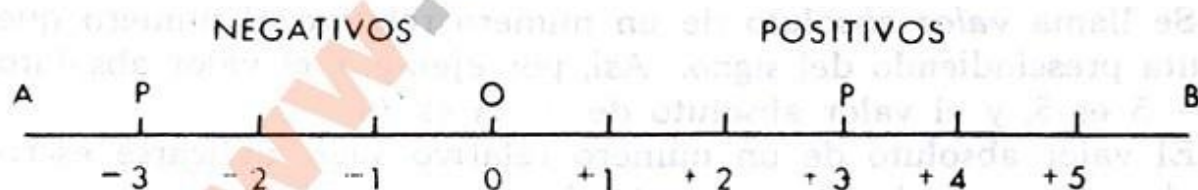
7º) $+\sqrt{2}$

4º) $-\sqrt{3}$

8º) $-2\frac{1}{3}$

11. Representación geométrica de los números relativos.

En la figura de página 6 pusimos en correspondencia los números reales absolutos con los puntos de la semirrecta OB. En virtud de la equiparación que hemos establecido entre los números absolutos y los positivos, adoptaremos la misma correspondencia entre los números reales positivos y los puntos de la semirrecta OB (figura siguiente). En cuanto a los números negativos, estableceremos una correspondencia análoga entre ellos y los puntos de la semirrecta opuesta OA, de tal manera que si P y P' son puntos igualmente distantes de O (o sea, simétricos con respecto a O) correspondan a ellos números de igual valor absoluto pero signos



Representación de los números relativos o con signos.

opuestos. Así, en esta figura, al punto P corresponde el número $+3$ y a su simétrico P' el número -3 .

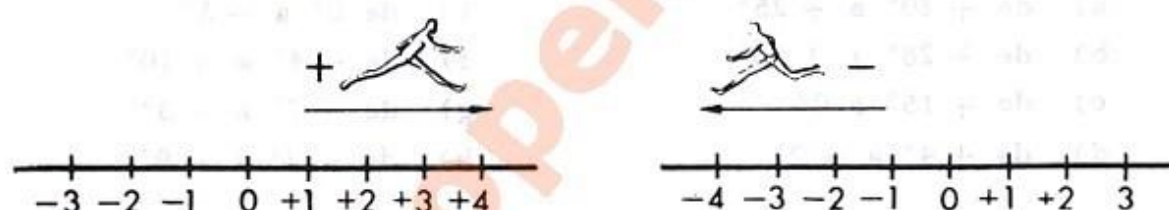
Mantendremos aquí las mismas denominaciones ya establecidas, llamando al número *abscisa* del punto y *medida* del segmento que une el origen al punto.

Así, por ejemplo, la abscisa de P es $+3$ y la abscisa de P' es -3 ; $+3$ es también la medida del segmento OP y -3 es la medida del segmento OP'.

En la figura siguiente se han marcado las abscisas de algunos acontecimientos históricos importantes.



Es útil poder representar los movimientos de un punto sobre la recta AB mediante los números relativos, o viceversa. Como los puntos de la semirrecta de la derecha (OB) se han puesto en correspondencia con los números positivos y los de la izquierda (OA) con los números negativos, diremos que los movimientos hacia la derecha son en *sentido positivo* y los movimientos hacia la izquierda en *sentido negativo*. Si partiendo ahora de un punto



cualquiera de la recta efectuamos un movimiento de 5 unidades en el sentido positivo, representaremos este movimiento por $+5$; pero si el movimiento se efectúa en el sentido opuesto (en sentido negativo), lo representaremos por -5 .

Así, por ejemplo, el movimiento de un punto que vaya desde $+3$ a $+7$ lo representaremos por $+4$; pero si va desde $+7$ a $+3$ lo representaremos por -4 .

El movimiento de un punto que vaya desde -5 a -2 lo representaremos por $+3$.

El movimiento de un punto que vaya desde -1 a -5 lo representaremos por -4 .

El movimiento de un punto que vaya desde $-3,5$ a $+4,5$ lo representaremos por $+8$.

El movimiento de un punto que vaya desde $+5$ a -2 lo representaremos por -7 .

El movimiento de un punto que vaya desde $+4$ a 0 lo representaremos por -4 ; etc.

Se llama *escala* a toda recta en que se haya marcado un origen y se hayan señalado las abscisas de algunos de sus puntos.

EJERCICIO 5.

1º) Tomando como unidad 1cm hacer una escala como la representada en la fig. 12, pero marcando las abscisas enteras desde -8 hasta $+8$.

2º) Utilizando la escala ya dibujada en el ejercicio anterior decir cómo se representaría el movimiento de un punto que fuese:

- | | |
|----------------------|------------------------|
| a) desde $+2$ a $+8$ | f) desde 0 a -3 |
| b) desde $+8$ a $+2$ | g) desde -3 a $+2$ |
| c) desde $+2$ a 0 | h) desde $+4$ a -5 |
| d) desde 0 a $+3$ | i) desde -3 a -8 |
| e) desde -3 a 0 | j) desde -6 a -1 . |

3º) Representar mediante números relativos los siguientes cambios de temperatura:

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| a) de $+20^\circ$ a $+25^\circ$ | e) de 0° a -5° |
| b) de $+28^\circ$ a $+23^\circ$ | f) de -4° a $+10^\circ$ |
| c) de $+15^\circ$ a 0° | g) de -7° a -3° |
| d) de $+4^\circ$ a -2° | h) de -2° a -9° . |

12. Suma de números relativos.

12-1. Suma de dos números positivos.

Habiendo equiparado los números positivos a los absolutos definiremos la suma de números positivos, como ya señalamos en § 9, mediante la suma de los números absolutos correspondientes y consideraremos positivo el resultado.

Así, por ejemplo, puesto que

$$2 + 3 = 5$$

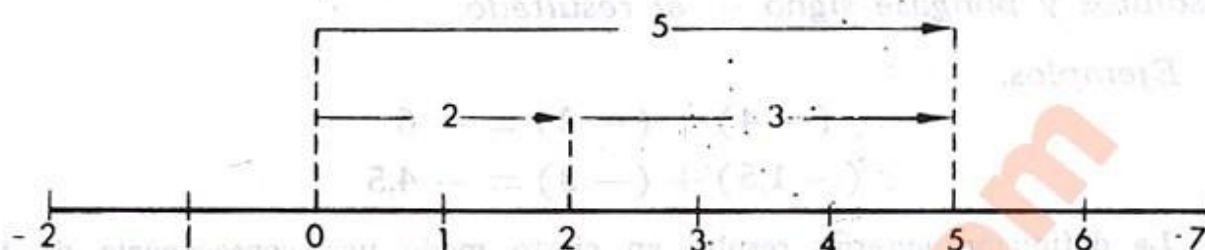
tendremos, por definición,

$$(+2) + (+3) = +5.$$

REGLA. Para sumar dos números positivos súmense sus valores absolutos (como en Aritmética) y póngase signo $+$ al resultado.

Interpretaciones.

1. Un movimiento de $+2$ unidades en la escala de la figura siguiente, seguido de un movimiento de $+3$ unidades, equivale a un movimiento de $+5$ unidades.



2. Una subida de 2° en la temperatura, seguida de una subida de 3° , equivale a una subida de 5° .

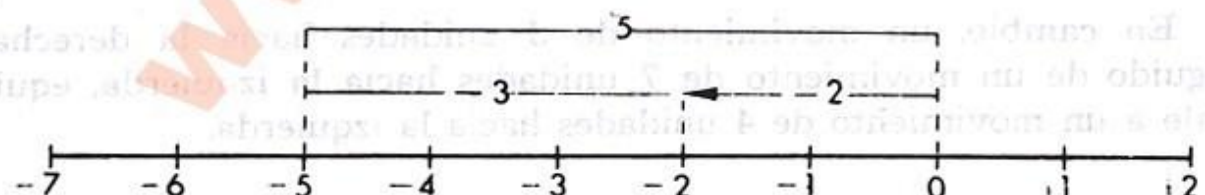
3. Un individuo que tiene en un banco un crédito de 4 000 \$ y en otro banco un crédito de 6 000 \$ tiene en total un crédito de 10 000 \$. Esto es:

$$\begin{array}{r} + \text{ 4 000 pesos} \\ + \text{ 6 000 pesos} \\ \hline + \text{ 10 000 pesos} \end{array}$$

12-2. Suma de dos números negativos.

Invirtamos el procedimiento seguido en § 12-1 y comencemos ahora por examinar ejemplos análogos a los considerados en dicho apartado, pero utilizando cantidades negativas, para ver si ello nos sugiere la manera de definir del modo más apropiado la suma de dos números negativos.

1. Un movimiento de -2 unidades, seguido de un movimiento de -3 unidades, equivale a un movimiento de -5 unidades (véase figura).



2. Un descenso de 2° en la temperatura, seguido de un descenso de 3° , equivale a un descenso de 5° .

3. Un individuo que tiene en un banco un débito de 4 000 \$ y en otro banco un débito de 6 000 \$ tiene en total un débito de 10 000 \$.

Estos ejemplos indican claramente que la definición más conveniente para la suma de números negativos es la contenida en la siguiente

REGLA. Para sumar dos números negativos sùmense sus valores absolutos y póngase signo — al resultado.

Ejemplos.

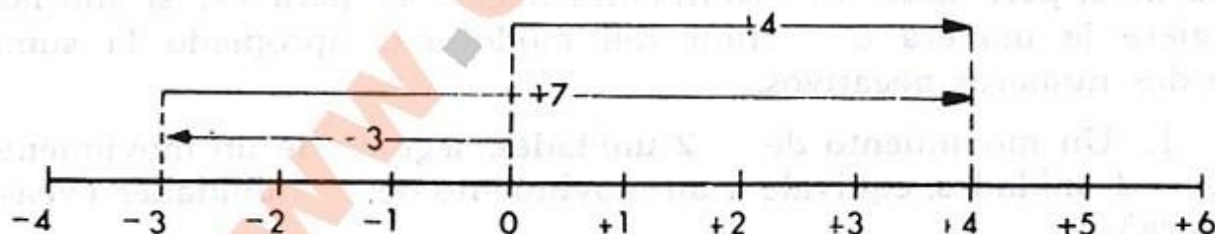
$$\begin{aligned}(-4) + (-2) &= -6 \\ (-1,5) + (-3) &= -4,5\end{aligned}$$

La definición anterior resulta en cierto modo una consecuencia de la dada en § 12-1 si se tiene en cuenta que los números con signos + ó — se usan en cada caso para representar cantidades de la misma magnitud pero de categorías distintas (de sentidos opuestos), siendo arbitraria la elección del grupo de cantidades que se consideran positivas (las cuales se representan por números con signo +); es decir, estas mismas cantidades podrían haberse elegido como negativas y vendrían entonces representadas por números negativos.

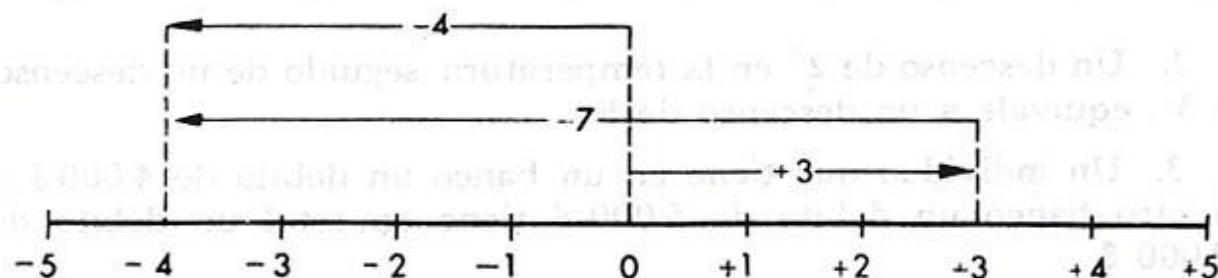
12-3. Suma de un número positivo y otro negativo.

Comencemos, como en el caso anterior, por examinar ejemplos análogos a los ya estudiados pero en los cuales intervengan cantidades positivas y negativas.

1. Un movimiento de 3 unidades hacia la izquierda, seguido de un movimiento de 7 unidades hacia la derecha, equivale a un movimiento de 4 unidades hacia la derecha.



En cambio, un movimiento de 3 unidades hacia la derecha, seguido de un movimiento de 7 unidades hacia la izquierda, equivale a un movimiento de 4 unidades hacia la izquierda.



2. Un descenso de 3° en la temperatura, seguido de un aumento de 7° equivale a un aumento de 4° .

Pero un aumento de 3° en la temperatura seguido de un descenso de 7° equivale a un descenso de 4° .

3. Un individuo que tiene en su cuenta con una casa comercial un crédito de 800 \$ y un débito de 300 \$ tiene un saldo favorable de 500 \$. Pero si el crédito es de 600 \$ y el débito es de 1 000 \$, tiene un saldo desfavorable de 400 \$, esto es, debe 400 \$.

Si tiene 600 \$ en el haber y 600 \$ en el debe, el saldo es 0 \$.

Los ejemplos anteriores sugieren la siguiente definición para la suma de un número positivo y otro negativo.

REGLA. Para sumar un número positivo y otro negativo hállese la diferencia de sus valores absolutos y póngase al resultado el signo del número que tenga mayor valor absoluto. Si los números tienen igual valor absoluto y signos contrarios el resultado será 0.

Ejemplos.

$$\begin{array}{r} -3 \\ +7 \\ \hline +4 \\ \\ -5 \\ +5 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +3 \\ -7 \\ \hline -4 \\ \\ -6 \\ +8 \\ \hline +2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +800 \\ -300 \\ \hline +500 \\ \\ -10 \\ +4 \\ \hline -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +600 \\ -1.000 \\ \hline -400 \\ \\ -3,2 \\ +4,1 \\ \hline +0,9 \end{array}$$

12-4. Suma de 0 y un número positivo o negativo.

Puesto que para la suma de 0 y un número absoluto se tiene, por ejemplo,

$$0 + 4 = 4 + 0 = 4$$

pondremos, por definición,

$$0 + (+4) = (+4) + 0 = +4$$

y con objeto de conservar esta propiedad del cero (ley de la identidad) para todo número relativo, pondremos, también por definición,

$$0 + (-4) = (-4) + 0 = -4$$

y, en particular,

$$0 + 0 = 0.$$

REGLA. La suma de cero y un número relativo cualquiera, o viceversa, es el mismo número relativo.

En símbolos:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

siendo a cualquier número relativo, positivo, negativo o nulo.

EJERCICIO 6.

1º) Efectuar las siguientes sumas de números relativos:

$$\begin{array}{r} a) \quad +3 \\ \quad +6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} f) \quad -8 \\ \quad +6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} k) \quad -5 \\ \quad 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} o) \quad -30 \\ \quad +50 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b) \quad -4 \\ \quad -2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} g) \quad +10 \\ \quad -6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} l) \quad 0 \\ \quad +3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} p) \quad -6,2 \\ \quad +1,2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} c) \quad -5,5 \\ \quad -1,2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} h) \quad -9 \\ \quad +2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} m) \quad -4 \\ \quad +4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} q) \quad -5,3 \\ \quad +8,1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} d) \quad +7 \\ \quad +2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} i) \quad -7 \\ \quad -3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} n) \quad +7 \\ \quad -7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} r) \quad -7,1 \\ \quad -5,9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} e) \quad -2 \\ \quad +3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} j) \quad +2 \\ \quad +4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ñ) \quad -30 \\ \quad +20 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} s) \quad -13 \\ \quad +2,5 \\ \hline \end{array}$$

2º) De 8 a 14 h la temperatura subió 3° , y de 14 a 20 h la temperatura bajó $4,5^\circ$. ¿Cuál fué el cambio de temperatura de 8 h a 20 h?

3º) En una jugada un jugador de fútbol norteamericano gana 12 yardas y pierde 5 por una falta. ¿Cuántas yardas avanza en esta jugada?

4º) Un barco que marcha a razón de 30 km por hora en agua tranquila está remontando la corriente de un río que tiene una velocidad de 8 km por hora. ¿A qué velocidad se mueve el barco con respecto a tierra firme?

5º) Sobre un fondo de roca que está a 12,5 m bajo el nivel del mar se ha levantado un faro de 50 m de alto. Averiguar a qué altura se halla el extremo superior del faro sobre el nivel del mar.

6º) El reloj de Pedro está atrasado 6 minutos con respecto al reloj de Antonio, pero el de éste está adelantado 4 minutos con respecto a la hora del Observatorio. ¿Cómo está el reloj de Pedro con respecto al del Observatorio?

12-5.

Es fácil comprobar que la suma de números relativos goza de las mismas propiedades formales (§ 6-4 a § 6-8) de la suma de núme-

ros absolutos. Nos limitaremos a señalar este hecho que es sencilla consecuencia de las definiciones dadas y de la validez de dichas leyes para los números absolutos. Por ejemplo,

$$a + b = b + a \quad (\text{ley conmutativa})$$

cuando los números a y b son relativos, ya que estas operaciones se realizan sumando o restando los valores absolutos de a y b sin tener en cuenta el orden de los sumandos. Ejemplos:

$$(+2) + (+3) = (+3) + (+2) = +5$$

$$(-2) + (-3) = (-3) + (-2) = -5$$

$$(+2) + (-3) = (-3) + (+2) = -1$$

$$(-2) + (+3) = (+3) + (-2) = +1.$$

12-6. Suma de más de dos números relativos.

Por suma de varios números relativos, v. gr.,

$$(-5) + (+2) + (+4) + (-8) + (-6) + (+10)$$

entenderemos lo siguiente: se **suman** los dos primeros números (de la izquierda), el resultado se **suma** al tercer número, el resultado de esta nueva suma se **agrega** al cuarto número, y así sucesivamente, hasta llegar al último número.

Así, en el caso del ejemplo anterior, tendríamos

$$(-5) + (+2) = -3$$

$$(-3) + (+4) = +1$$

$$(+1) + (-8) = -7$$

$$(-7) + (-6) = -13$$

$$(-13) + (+10) = -3,$$

luego

$$(-5) + (+2) + (+4) + (-8) + (-6) + (+10) = -3.$$

En la práctica, cuando los números son sencillos, como los del ejemplo precedente, las operaciones sucesivas se realizan mentalmente.

Por lo general se prescinde de escribir los números en paréntesis y también se omite el signo $+$ de adición, conservando los signos propios de cada sumando. Así, en el caso anterior se escribiría simplemente:

$$-5 + 2 + 4 - 8 - 6 + 10 = -3.$$

También se pueden escribir los números en columna, como muestran los siguientes ejemplos:

$$\begin{array}{r}
 -2 \\
 +4 \\
 +3 \\
 -6 \\
 \hline
 -1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 -3 \\
 -5 \\
 +8 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 +6 \\
 -2 \\
 +4 \\
 -1 \\
 \hline
 +7
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 -4 \\
 -5 \\
 +6 \\
 +1 \\
 \hline
 -2
 \end{array}$$

Cuando los números que se han de sumar no son sencillos o la cantidad de sumandos es grande, conviene hacer uso de las propiedades conmutativa y asociativa sumando aparte, por un lado, los números positivos, por otro, los negativos, y sumando finalmente los resultados obtenidos.

Ejemplo. Efectuar la suma

$$+35 - 42 + 77 - 8 - 41 - 5 + 6 + 50 - 15.$$

Dispondremos el cálculo así:

$$\begin{array}{r}
 +35 \\
 +77 \\
 +6 \\
 +50 \\
 \hline
 +168
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 -42 \\
 -8 \\
 -41 \\
 -5 \\
 -15 \\
 \hline
 -111
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 +168 \\
 -111 \\
 \hline
 +57
 \end{array}$$

Por tanto, el resultado buscado es $+57$.

La suma de números relativos, obtenida de acuerdo con las reglas dadas, suele llamarse *suma algebraica* de estos números, para distinguirla de la *suma aritmética* o suma de sus valores absolutos.

EJERCICIO 7.

1º) Efectuar las siguientes sumas:

a) $(+3) + (-5) + (-9) + (+2)$

b) $(-7) + (-1) + (+4) + (-8)$

c) $(+2) + (+6) + (-7) + (-4) + (-1)$

d) $(-4,2) + (+3,6) + (-1,4)$

e) $(-6) + (+5) + (-8) + (+10) + (-12) + (+14)$

f) $-7 + 6 + 9 - 3 - 6 - 5 + 2 - 3$

g) $+4 - 3 - 2 + 5 - 10 - 12 + 20 - 6$

h) $-60 + 25 + 6 - 10 + 8 + 75 - 3$

i) $+30 - 10 + 80 - 120 + 9 + 6 - 8 - 40$

j) $-18 - 8 - 6 + 14 + 20 + 50 - 60$

$$\begin{array}{r} k) \quad + 8 \\ \quad - 6 \\ \quad + 3 \\ \quad - 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} m) \quad - 4 \\ \quad + 2 \\ \quad + 16 \\ \quad - 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ñ) \quad - 1.000 \\ \quad + 800 \\ \quad - 200 \\ \quad + 150 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} l) \quad - 7 \\ \quad - 5 \\ \quad - 2 \\ \quad + 6 \\ \quad + 10 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} n) \quad - 220 \\ \quad + 115 \\ \quad - 84 \\ \quad - 105 \\ \quad + 150 \\ \quad - 20 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} o) \quad - 15,1 \\ \quad + 14,2 \\ \quad - 13,3 \\ \quad + 18,5 \\ \quad - 9,2 \\ \quad + 7,6 \\ \hline \end{array}$$

2º) El termómetro marca $+ 24^\circ$. Después la temperatura sube 3° , baja 5° , sube 2° , baja 7° y sube 4° . ¿Cuál es la temperatura final?

3º) Tomás tiene 200 \$ en su cuenta de ahorros. Después deposita 25 \$, extrae 60 \$, vuelve a extraer 35 \$ y finalmente deposita 50 \$. ¿Cuál es su saldo?

4º) Juan comienza un juego de azar con 5 fichas. Gana 2, pierde 6, gana 4, pierde 2 y gana 7. ¿Cuántas fichas tiene al final?

5º) Un avión que volaba a 1 000 m sobre el nivel del mar subió 200 m, bajó 150 m, subió 300 m, bajó 500 m y, por último bajó 100 m. ¿A qué altura vuela ahora?

13. Sustracción de números relativos.

13-1.

Al tratar sobre la adición hemos dicho que la suma de dos números relativos del mismo valor absoluto y signos opuestos es cero; por ejemplo,

$$(+ 3) + (- 3) = 0$$

y, en general,

$$(+ k) + (- k) = 0.$$

Se dice que el número $- k$ es el opuesto de $+ k$ y que, recíprocamente, $+ k$ es el opuesto de $- k$. Representando por a un número relativo cualquiera (positivo o negativo) y por a' su opuesto, tendremos

$$[1] \quad a + a' = 0$$

Es evidente que el número a sólo puede tener un opuesto; en efecto, si hubiese otro número a'' tal que $a + a'' = 0$, sumando a'' en ambos miembros de [1] tendríamos

$$a'' + a + a' = a'' + 0$$

y como $a'' + a = 0$ resultaría

$$a' = a''.$$

Los números relativos y las operaciones fundamentales con ellos pueden ser definidos mediante el expediente de agregar la relación [1] en calidad de axioma al grupo II del párrafo 6, es decir, postulando que a cada número a corresponde un opuesto (designado por a') tal que la relación [1] se cumpla. Este axioma de "existencia del opuesto" vendría a corresponder en el grupo II al axioma 6-15 de "existencia del inverso" del grupo III. El sistema de axiomas del párrafo 6, así aumentado con [1], sirve para caracterizar perfectamente a los números relativos.

13-2.

Veamos cómo la propiedad [1] puede utilizarse para resolver en todos los casos el problema de la sustracción, la cual, en el sistema más restringido de los números absolutos, es solamente posible cuando el minuendo es mayor o igual que el sustraendo.

En general, cualquiera que sea el sistema numérico considerado, se llama *sustracción* a la operación inversa de la suma, esto es, la operación que consiste en hallar un número x que sumado con un número dado a dé un resultado igual a otro número también dado b , es decir, tal que

$$[2] \quad x + a = b$$

Para determinar este número x (llamado *diferencia* entre b y a) bastará sumar en ambos miembros de la igualdad anterior el número a' opuesto de a ; en efecto, se obtiene

$$x + a + a' = b + a'$$

pero por la propiedad asociativa puede efectuarse primero en el miembro de la izquierda la suma $a + a' = 0$, y puesto que $x + 0 = x$, resulta:

$$[3] \quad x = b + a'$$

que nos dice que para hallar la diferencia entre b y a basta sumar a b el opuesto de a .

Así, por ejemplo, la diferencia entre $+2$ y -5 es igual a

$$(+2) + (+5) = +7.$$

Comprobación: $(+7) + (-5) = +2.$

La diferencia x entre los números relativos b y a se indica por

la misma notación $b - a$ que se usa para los números absolutos. Por tanto, la [3] se puede también escribir

$$[4] \quad b - a = b + a'.$$

Aquí el signo $-$ del primer miembro es un signo operatorio que nos indica que el número a debe restarse del número b . El miembro de la derecha nos dice que esto se obtiene sencillamente sumando a b el opuesto de a .

Ejemplos.

$$(-4) - (-6) = (-4) + (+6) = +2$$

$$(-8) - (+5) = (-8) + (-5) = -13$$

$$(+9) - (+6) = (+9) + (-6) = +3.$$

Cuando se generaliza una operación a un sistema numérico más amplio se conserva su nomenclatura; así, en el caso de la diferencia $b - a$, el número b continúa llamándose el *minuendo* y el número a el *sustraendo*. Con esta terminología la regla dada para la sustracción se puede enunciar así:

Para hallar la diferencia entre dos números relativos súmese al minuendo el sustraendo cambiado de signo.

Cuando los números se disponen en columna, suele indicarse el cambio de signo del sustraendo escribiendo el nuevo signo debajo del antiguo, como se ve en los siguientes ejemplos:

$$\begin{array}{r} -4 \\ +6 \\ \hline +2 \end{array} \quad \begin{array}{r} -8 \\ +5 \\ \hline -13 \end{array} \quad \begin{array}{r} +10 \\ -7 \\ \hline +3 \end{array} \quad \begin{array}{r} +3 \\ -6 \\ \hline +9 \end{array}$$

Comparando la igualdad [2] con la [3], a saber:

$$[2] \quad x + a = b$$

$$[3] \quad x = b + a'$$

se deduce que un número (en este caso a) se puede pasar de un miembro a otro de una igualdad sustituyéndolo por su opuesto, es decir, cambiándole de signo. Este es un caso particular de un principio general de gran aplicación en toda el Álgebra, como pronto veremos.

Aunque en todo lo anterior, para mayor claridad, hemos representado por a' el opuesto de a , en la práctica suele representarse por $-a$ (ya sea a positivo o negativo), en donde el signo $-$ delante de a tiene el carácter de signo

operatorio; esto se justifica en virtud de [4] y podemos verlo claramente en los siguientes ejemplos:

Si $a = +5$, $a' = -5$ y, por otra parte,

$$-a = -(+5) = 0 - (+5) = 0 + (-5) = -5$$

luego $a' = -a$.

Si $a = -6$, $a' = +6$ y, por otra parte,

$$-a = -(-6) = 0 - (-6) = 0 + (+6) = +6$$

luego, también en este caso, $a' = -a$.

Al tratar de la suma en § 12.6 hemos visto que el signo operatorio $+$ delante de un paréntesis puede suprimirse, dejando el signo propio del número encerrado en el paréntesis. De modo que, por ejemplo,

$$+(+5) = +5, \quad +(-6) = -6.$$

Por el contrario, acabamos de ver que el signo $-$ delante de un número relativo equivale a tomar su opuesto, v. gr.,

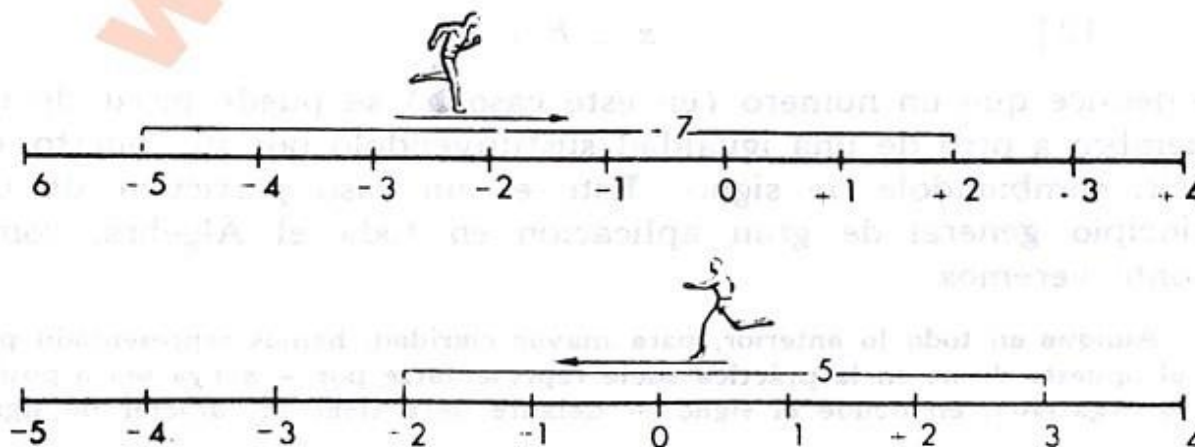
$$-(+5) = -5, \quad -(-6) = +6.$$

En estos convenios se basa el principio de la supresión de paréntesis del cual trataremos detenidamente más adelante.

13-3. Interpretación de la sustracción de números relativos.

Utilizando la representación geométrica de los números relativos se puede interpretar el problema de la sustracción de números relativos en la siguiente forma: ¿a qué distancia y en qué sentido está el punto representativo del sustraendo del punto representativo del minuendo? O de otra manera: partiendo del punto correspondiente al sustraendo, ¿cuántas unidades hay que moverse y en qué sentido para alcanzar el punto correspondiente al minuendo?

Así, por ejemplo, la diferencia $(+2) - (-5) = +7$ está representada gráficamente en la primera figura, y la diferencia $(-2) - (+3) = -5$ en la segunda.



EJERCICIO 8.

1º) Efectuar las siguientes sustracciones:

a) $(+8) - (+3)$

f) $(-1) - (-8)$

b) $(+4) - (+9)$

g) $(-3\frac{1}{4}) - (+2\frac{1}{2})$

c) $(-6) - (+2)$

h) $(+4,1) - (+6,2)$

d) $(+7) - (-5)$

i) $(-45) - (+60)$

e) $(-3) - (-2)$

j) $(+3,8) - (-4,2)$

k)
$$\begin{array}{r} +10 \\ +12 \\ \hline \end{array}$$

m)
$$\begin{array}{r} -9 \\ -8 \\ \hline \end{array}$$

ñ)
$$\begin{array}{r} -3 \\ -7 \\ \hline \end{array}$$

l)
$$\begin{array}{r} +15 \\ -20 \\ \hline \end{array}$$

n)
$$\begin{array}{r} -15,6 \\ +5,4 \\ \hline \end{array}$$

o)
$$\begin{array}{r} -2\frac{1}{3} \\ -3\frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$$

3º) ¿Cuál es la diferencia de nivel entre un punto que está a 1 500 m sobre el nivel del mar y otro que está a -300 m?4º) Averiguar cuántos años transcurrieron desde la muerte de Julio César (año -44) hasta la caída del Imperio Romano de Occidente (año $+395$).4º) En Nueva York la temperatura cierto día fué de $+6^\circ$ a las 10 hs. y de -5° a las 22 hs. ¿En cuántos grados cambió la temperatura?

5º) Hallar las siguientes diferencias utilizando la representación geométrica:

a) $(+4) - (-3)$

c) $(-3) - (-4)$

b) $(+2) - (+5)$

d) $(-2) - (+3)$.

14. Multiplicación de números relativos.**14-1. Producto de dos números relativos.**

Definiremos el producto de dos números relativos (llamados factores), mediante la siguiente

REGLA. Para multiplicar dos números relativos se halla el producto de sus valores absolutos. Si los factores tienen el mismo signo se antepone al producto el signo $+$; si los factores tienen signos diferentes se antepone al producto el signo $-$. Cuando, por lo menos, uno de los factores es 0 el producto es 0.

El producto de los números a y b se indica, como en Aritmética, por cualquiera de las notaciones:

$$a \times b, \quad a \cdot b \quad \text{ó} \quad ab.$$

Utilizaremos preferentemente las dos últimas, encerrando los factores en paréntesis cuando se trate de símbolos numéricos.

Ejemplos.

$$(+3)(+5) = +15$$

$$(-3)(-5) = +15$$

$$(+3)(-5) = -15$$

$$(-3)(+5) = -15$$

$$(-2)(0) = 0$$

$$(0)(+3) = 0$$

$$0 \cdot 0 = 0.$$

La regla anterior se justifica observando que con tal definición de producto se logra que todas las leyes formales de la multiplicación (§§ 6-9 á 6-15 y 6-18) se conserven válidas para los números relativos. Por otra parte, dicha regla permite interpretaciones apropiadas en la teoría de las magnitudes relativas, como veremos en seguida.

La regla de los signos dada se recuerda mediante el esquema:

+	·	+	=	+
-	·	-	=	+
+	·	-	=	-
-	·	+	=	-

Sorprende a veces al principiante el convenio $- \cdot - = +$. Aceptando los restantes convenios de signos y la ventaja de mantener la ley distributiva de la multiplicación, resulta ineludible la regla $- \cdot - = +$. Consideremos, para comprobarlo, el siguiente ejemplo:

$$[(+5) + (-2)](-3) = (+3)(-3) = -9$$

pero, según la ley distributiva (cuya vigencia se desea mantener),

$$[(+5) + (-2)](-3) = (+5)(-3) + (-2)(-3) = -15 + (-2)(-3)$$

luego habrá de tenerse

$$-15 + (-2)(-3) = -9$$

de dc

$$(-2)(-3) = +15 - 9 = +6$$

Interpretaciones.

1. Un avión comercial recorre 5° hacia el norte partiendo de un punto del ecuador y un avión de pasajeros recorre en el *mismo sentido* una distancia 2 veces mayor. ¿Qué latitud alcanza el avión de pasajeros?

Respuesta: $(+ 5^\circ)(+ 2) = + 10^\circ$.

Supongamos que el avión comercial recorre 5° hacia el norte pero que el avión de pasajeros recorre 2 veces esa distancia en *sentido opuesto*. ¿Qué latitud alcanza ahora?

Respuesta: $(+ 5^\circ)(- 2) = - 10^\circ$, es decir, 10° al sur del ecuador.

Supongamos ahora que el avión comercial recorre 5° hacia el sur del ecuador y el avión de pasajeros 2 veces esa distancia en el *mismo sentido*. ¿Qué latitud alcanza?

Respuesta: $(- 5^\circ)(+ 2) = - 10^\circ$.

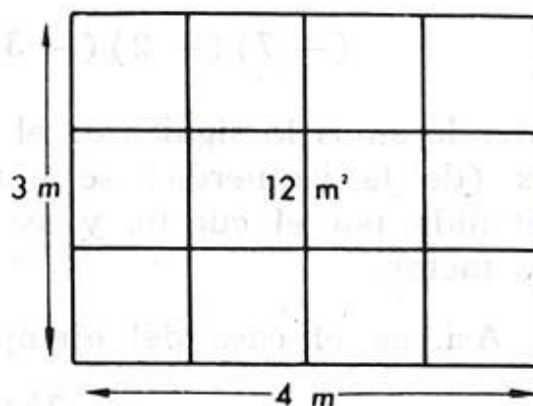
Supongamos, finalmente, que el avión comercial recorre 5° hacia el sur del ecuador y el avión de pasajeros 2 veces esa distancia en *sentido opuesto*. ¿Qué latitud alcanza?

Respuesta: $(- 5^\circ)(- 2) = + 10^\circ$, es decir, 10° al norte del ecuador.

2. Como se sabe, la medida del área de un rectángulo se obtiene multiplicando las medidas de las longitudes de sus lados, expresadas en la misma unidad.

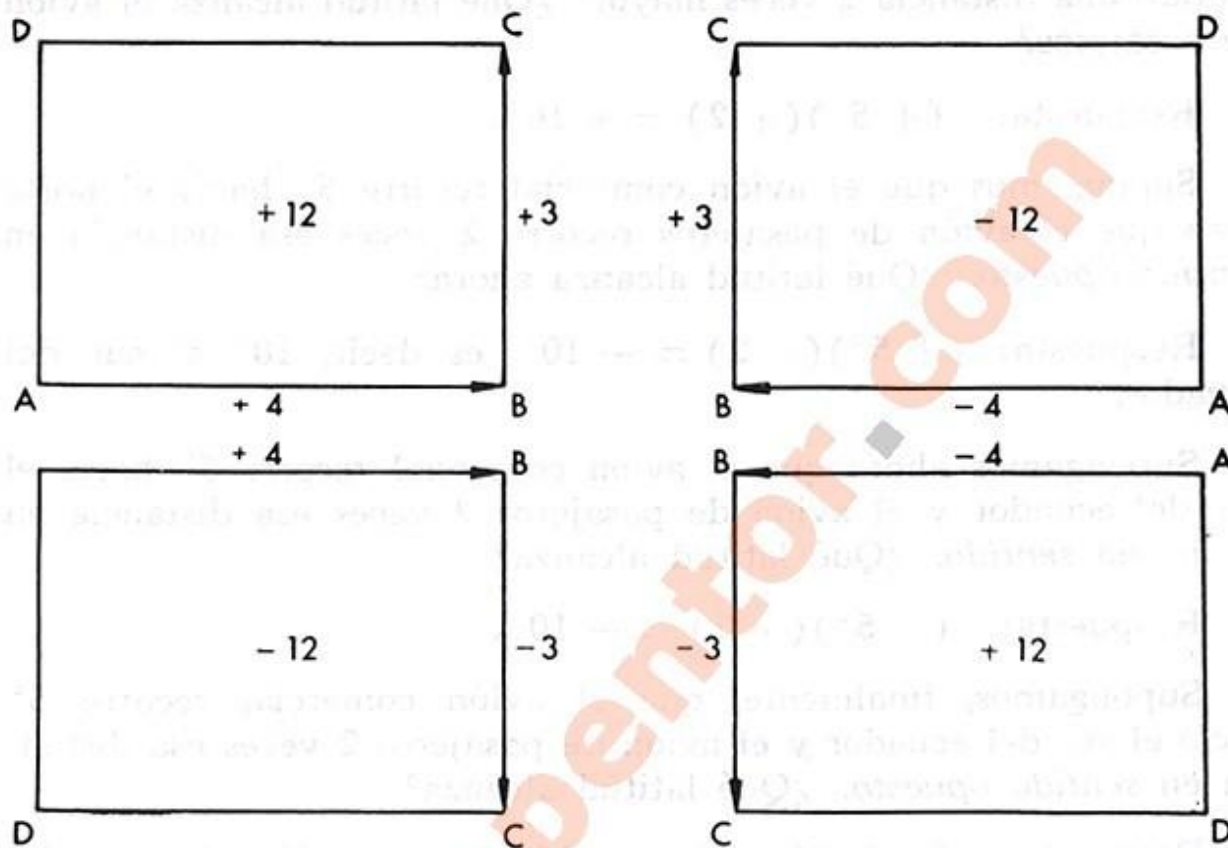
Si se fija un sentido de recorrido a los lados expresando su medida mediante números relativos, se puede atribuir un signo al área, *positivo* o *negativo*, según que el contorno resulte recorrido dejando el área a la *izquierda* o a la *derecha*, respectivamente, como se ve en los cuatro casos

considerados en la figura de página siguiente, en donde el sentido de recorrido de los lados se indica con flechas y las medidas correspondientes se expresan sobre las figuras mismas.



Nótese que en los rectángulos cuya área es $+ 12$, al recorrer

el contorno en el orden ABCD el área queda a la izquierda del observador; en tanto que al recorrer el contorno de los rectángulos cuya área es -12 en el orden ABCD, el área queda a la derecha.



14-2. Producto de varios números relativos.

Por producto de varios números relativos, v. gr.,

$$(-7)(+2)(-3)\left(-\frac{5}{6}\right)\left(+\frac{1}{10}\right)(-4),$$

entenderemos lo siguiente: el producto de los dos primeros números (de la izquierda) se multiplica por el tercero, el producto obtenido por el cuarto, y así sucesivamente, hasta llegar al último factor.

Así, en el caso del ejemplo anterior, se tiene:

$$(-7)(+2) = -14$$

$$(-14)(-3) = +42$$

$$(+42)\left(-\frac{5}{6}\right) = -35$$

$$(-35)(+\frac{1}{10}) = -3,5$$

$$(-3,5)(-4) = +14,$$

luego

$$(-7)(+2)(-3)(-\frac{5}{6})(+\frac{1}{10})(-4) = +14.$$

Es evidente que el signo del resultado final será $+$ ó $-$, según que el número de factores negativos sea par ó impar.

Si es conveniente, para calcular el producto puede cambiarse el orden de los factores o asociarlos de cualquier manera, en virtud de las leyes conmutativa y asociativa.

Es sencillo probar que el producto de números relativos satisface estas leyes, ya que para obtener el resultado se halla el producto de los valores absolutos de los factores (el cual satisface dichas propiedades) y se le pone un signo que depende solamente, como hemos observado antes, del número de factores negativos que componen el producto, pero no de su orden o de cualquier otra circunstancia.

EJERCICIO 9.

1º) Obtener los productos indicados siguientes:

a) $(+4)(-6)$

b) $(+3)(+8)$

c) $(-2)(+6)$

d) $(-4)(-7)$

e) $(-\frac{2}{3})(+\frac{6}{5})$

f) $(+3)(-2,5)$

g) $(-1)(+8)$

h) $(-0,5)(-3,4)$

i) $(+1\frac{2}{3})(+3\frac{3}{5})$

j) $(+2,8)(-0,2)$

k) $(-1)(+1)(-2)(+3)$

l) $(-9)(+4)(-\frac{1}{2})(+\frac{1}{3})$

m) $(-5)(-2)(-1)(-4)$

n) $(-3)(+3)(-2)(+4)(-\frac{1}{6})$

ñ) $(+2)(-2)(+2)(-2)(+2)$

o) $(-3)(-5)(-2)(+\frac{1}{3})(+\frac{1}{10})(+4)$

2º) Un avión A vuela 8° en dirección este $(+8^\circ)$ partiendo de un punto situado en el meridiano de Greenwich y un avión B recorre 3 veces esa distancia en sentido opuesto partiendo del mismo punto. ¿Qué longitud geográfica alcanza el avión B?

3º) En las mismas condiciones del problema anterior, el avión A vuela 8° en dirección este y el avión B recorre 4 veces esa distancia en el mismo sentido. ¿Qué longitud alcanza?

4º) En las mismas condiciones de los problemas anteriores, el avión A vuela 10° en dirección oeste y el avión B recorre 3 veces esa distancia en el mismo sentido. ¿Qué longitud alcanza?

5º) Todavía en las condiciones anteriores, si el avión A vuela 10° en dirección oeste y el avión B recorre 4 veces esa distancia en sentido opuesto. ¿Qué longitud alcanza?

6º) Un tren que corre en dirección este-oeste pasa por una ciudad A a las 12 h con una velocidad constante de 50 km por hora. Consideremos la velocidad positiva cuando el tren se mueve hacia el este y negativa cuando se mueve hacia el oeste; y consideremos también las horas posteriores al mediodía como positivas y las anteriores como negativas; teniendo en cuenta, por otra parte, que en el movimiento uniforme la distancia se encuentra multiplicando la velocidad por el tiempo, determinar la distancia a que se halla el tren de A en los siguientes casos:

- a) a las 15 h si se mueve hacia el oeste.
- b) a las 9 h si se mueve hacia el este.
- c) a las 2 h si se mueve hacia el este.
- d) a las 10 h si se mueve hacia el oeste.

15. Potenciación de números relativos.

15-1.

Los productos de la forma

$$(-5)(-5)(-5)(-5),$$

en que todos los factores son iguales, se representan, lo mismo que en el caso de factores reales absolutos, por la notación $(-5)^4$.

En general, si a es un número relativo cualquiera y $n > 1$ es un número natural, la notación

$$a^n$$

indica el producto de n factores iguales a a . Esto suele expresarse así:

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^n$$

El producto resultante recibe el nombre de *potencia*, de *base* a y *exponente* n .

Así, por ejemplo, en

$$(-5)^4 = 625,$$

625 es la potencia, -5 es la base y 4 es el exponente. La operación de calcular la potencia se llama *potenciación* o *elevación a potencia*.

La definición anterior se amplía conviniendo en que $a^1 = a$.

Más adelante definiremos la potenciación para otros tipos de exponentes (cero, negativo, fraccionario).

He aquí otros ejemplos de elevación a potencia:

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = +9$$

$$(+4)^3 = (+4)(+4)(+4) = +64$$

$$(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$$

$$(-1)^4 = +1$$

$$0^3 = 0$$

$$(-5)^1 = -5$$

$$\left(+\frac{2}{3}\right)^3 = \left(+\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{2}{3}\right) = +\frac{8}{27}$$

Es claro que cuando la base es negativa y el exponente es par (como en los ejemplos primero y cuarto), la potencia resultante es positiva (por contener el producto un número par de factores negativos); en tanto que cuando la base es negativa y el exponente es impar (como en el ejemplo tercero), la potencia resultante es negativa (por contener el producto un número impar de factores negativos).

Representando por $2p$ un número natural par y por $2p+1$ uno impar, tendremos, pues, en general,

$$(-b)^{2p} = +B, \quad (-b)^{2p+1} = -B'.$$

REGLA. Las potencias de exponente par de los números negativos son siempre positivas. Las potencias de exponente impar de los números negativos son siempre negativas.

En cuanto a las potencias de los números positivos, son siempre positivas, ya sea par o impar el exponente, esto es:

$$(+b)^n = +B.$$

15-2.

La propiedad fundamental de las potencias se expresa simbólicamente así:

$$[1] \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Esto constituye el llamado principio de *aditividad de exponentes*, que en palabras se traduce en la siguiente

REGLA. Para multiplicar dos potencias de la misma base se conserva la base y se suman los exponentes.

Ejemplos.

$$(-8)^2 \cdot (-8)^3 = (-8)^5$$

Para ver que esto es correcto basta tener en cuenta que, según la definición de potencia y la ley asociativa del producto, se tiene

$$(-8)^2 \cdot (-8)^3 = (-8)(-8) \cdot (-8)(-8)(-8) = (-8)^5$$

Del mismo modo se prueba la propiedad en general; se tiene, efectivamente,

$$a^m \cdot a^n = (\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^m)(\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^n) = \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m+n} = a^{m+n}.$$

Otros ejemplos.

$$2^5 \cdot 2^3 = 2^8$$

$$(-2/3)^5 (-2/3)^2 = (-2/3)^7$$

$$a^2 \cdot a^4 \cdot a^5 = a^6 \cdot a^5 = a^{11}$$

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$$

$$9 \cdot 27 \cdot 3^2 = 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^2 = 3^7 = 2\,187$$

Observación. Es frecuente error en los principiantes obtener la potencia en los ejemplos numéricos *multiplicando las bases* y sumando los exponentes; por ejemplo, lo correcto es

$$3^2 \cdot 3^3 = 3^5 = 243$$

y no

$$3^2 \cdot 3^3 = 9^5 = 59\,049 \quad (!)$$

La regla de adición de exponentes permite también resolver el caso en que se tenga que calcular la potencia de una potencia; por ejemplo,

$$(5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^{2+2+2} = 5^{2 \times 3} = 5^6$$

En general, se tiene

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

En efecto,

$$(a^m)^n = \overbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}^n = \overbrace{a^{m+m+\dots+m}}^n = a^{mn}$$

REGLA. Para calcular la potencia de una potencia basta multiplicar los exponentes y conservar la base primitiva.

Otros ejemplos.

$$[(-3)^2]^4 = (-3)^8 = 6561$$

$$[(+\frac{2}{3})^3]^5 = (+\frac{2}{3})^{15}$$

Observación. No debe confundirse la notación

$$(2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$$

con esta otra

$$2^{3^2} = 2^9.$$

EJERCICIO 10.

1º) Calcular las potencias siguientes:

a) $(-4)^2$

b) $(+3)^3$

c) $(-2)^5$

d) $(+1,2)^2$

e) $(-5)^5$

f) $(+\frac{1}{2})^4$

g) $(-\frac{3}{4})^3$

h) $(0,1)^5$

i) $(-6)^3$

j) $(\sqrt{2})^4$

2º) Probar que $(-1)^{2n} = +1$ y que $(-1)^{2n+1} = -1$.

3º) Calcular:

a) $2^4 \cdot 2^6$

b) $(-3)^2(-3)^4$

c) $5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4$

d) $(2/3)^2 (2/3)^3$

e) $(3^2)^3$

f) $[(-2)^3]^4$

g) $[(+1/2)^3]^2$

h) $(2^2)(4^3)(8)$

i) $4^n \cdot 2^n$

j) $27^{n-1} \cdot 3^{2n}$

k) $9^n \cdot 27^{n+1}$

4º) Probar que $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 3 \cdot 5)^3 = 30^3$

5º) Probar que $a^n \cdot b^n \cdot c^n = (a \cdot b \cdot c)^n$

6º) Probar que $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

16. División de números relativos.

16-1.

A todo número real absoluto $h \neq 0$ corresponde, según el axioma 6-15, otro número real absoluto $k \neq 0$ (llamado el *inverso* o *recíproco* de h), tal que

$$hk = 1.$$

Si en vez de números absolutos consideramos números relativos y llamamos *inversos* o *recíprocos* aquellos números relativos cuyo producto sea $+1$, tendremos que el inverso de $+h$ será $+k$ y el inverso de $-h$ será $-k$, siendo $hk = 1$; en efecto,

$$\begin{aligned} (+h)(+k) &= + (hk) = +1 \\ (-h)(-k) &= + (hk) = +1. \end{aligned}$$

Así, por ejemplo,

$$\text{el inverso de } +2 \text{ es } +\frac{1}{2}$$

$$\text{el inverso de } -\frac{3}{5} \text{ es } -\frac{5}{3}$$

$$\text{el inverso de } -\sqrt{2} \text{ es } -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{el inverso de } +\frac{1}{3} \text{ es } +3.$$

Todo número relativo distinto de cero posee, pues, un inverso que tiene su mismo signo.

Es fácil probar que el inverso de un número relativo es único. En efecto, supongamos que el número relativo a tiene dos inversos a' y a'' ; tendremos

$$aa' = +1 \quad \text{y} \quad aa'' = +1.$$

Multiplicando la primera igualdad por a'' y teniendo en cuenta la segunda, resulta

$$a''aa' = a'' \quad \text{ó} \quad a' = a''.$$

16-2.

La *división* es la operación inversa de la multiplicación (de dos factores), y consiste en hallar uno de los factores, conocidos el otro factor y el producto. En otros términos: dividir un número dado b

(dividendo) por otro número dado a (divisor) es hallar un número x (cociente), tal que

$$[1] \quad ax = b$$

Esta operación es siempre posible en el sistema de los números reales relativos si es $a \neq 0$, esto es, si el divisor es distinto de cero.

En efecto, designando por $\frac{1}{a}$ el inverso de a , como hicimos en § 7-8, resulta, multiplicando ambos miembros de [1] por $\frac{1}{a}$:

$$\frac{1}{a} (ax) = \frac{1}{a} b$$

pero

$$\frac{1}{a} (ax) = \left(\frac{1}{a} a \right) x = (+1) x = x$$

luego queda

$$x = \frac{1}{a} b$$

y se obtiene la siguiente

REGLA. Para dividir b por a basta multiplicar b por el recíproco de a .

Obsérvese la analogía entre esta regla y la dada en § 13-2 para la sustracción. De igual modo que la sustracción se reduce a la suma del opuesto del sustraendo, la división se reduce a la multiplicación por el inverso del divisor.

Notación. El cociente de b por a se indica por $b : a$, $b \div a$ y más corrientemente en Álgebra, por $\frac{b}{a}$ ó b/a .

Ejemplos.

$$(+20) : (+5) = (+20) \left(+\frac{1}{5} \right) = +4$$

$$(-20) : (+5) = (-20) \left(+\frac{1}{5} \right) = -4$$

$$(+20) : (-5) = (+20) \left(-\frac{1}{5} \right) = -4$$

$$(-20) : (-5) = (-20) \left(-\frac{1}{5}\right) = +4$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right) : \left(+\frac{9}{2}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right) \left(+\frac{2}{9}\right) = -\frac{1}{6}.$$

Como el recíproco de un número tiene el mismo signo que él, resulta para el signo del cociente la misma regla dada para el signo de un producto. Por tanto,

El cociente de dos números del mismo signo es positivo.

El cociente de dos números de signos opuestos es negativo.

Esta regla se recuerda fácilmente mediante el esquema:

$\frac{+}{+} = +$	$\frac{-}{-} = +$
$\frac{+}{-} = -$	$\frac{-}{+} = -$

16-3.

Conviene observar que el cociente de dos números relativos no varía porque se multipliquen o dividan ambos por el mismo número relativo distinto de cero.

Así, por ejemplo,

$$\frac{+24}{-6} = \frac{+12}{-3} = \frac{+4}{-1} = -4.$$

En efecto, de

$$[1] \quad ax = b$$

resulta, multiplicando ambos miembros por k ,

$$[2] \quad kax = kb$$

y, recíprocamente, de [2] se obtiene [1] multiplicando por $1/k$. Por tanto:

$$[3] \quad x = \frac{b}{a} = \frac{kb}{ka}$$

En particular, puede tomarse $k = -1$; como multiplicar un número por -1 equivale a cambiarle de signo, se tiene:

El cociente de dos números relativos no varía porque se cambie de signo al dividendo y al divisor.

Ejemplos.

$$\frac{-30}{+6} = \frac{+30}{-6} = -5$$

$$\frac{+10}{+5} = \frac{-10}{-5} = +2.$$

16-4.

Consideremos, por último, el cociente a^m/a^n de dos potencias de la misma base $a \neq 0$.

Distinguiremos tres casos:

1) $m > n$.

Haciendo $m = n + h$ y teniendo en cuenta 15-2 y la propiedad [3] establecida anteriormente en 16-3, resulta:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n \cdot a^h}{a^n} = a^h = a^{m-n}.$$

2) $m = n$.

En este caso se tiene, evidentemente,

$$\frac{a^m}{a^m} = +1$$

por tratarse del cociente de un número por él mismo.

3) $m < n$.

Haciendo $n = m + h$ se obtiene ahora

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^h} = \frac{1}{a^h} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Por tanto, en el primer caso para dividir las potencias se conserva la base y se restan los exponentes. En el segundo caso el resultado es siempre $+1$. En el tercer caso el resultado es el valor recíproco de la potencia que se obtiene conservando la base y restando el exponente menor del mayor.

Ejemplos.

$$\frac{(-4)^5}{(-4)^3} = (-4)^{5-3} = (-4)^2 = +16$$

$$\frac{(-4)^5}{(-4)^5} = +1$$

$$\frac{(-4)^3}{(-4)^5} = \frac{1}{(-4)^{5-3}} = \frac{1}{(-4)^2} = +\frac{1}{16}$$

Los casos segundo y tercero pueden incluirse en el primero mediante los convenios siguientes:

I. Todo número $a \neq 0$ elevado al exponente 0 es igual a $+1$; esto es,

$$a^0 = +1$$

II. Todo número $a \neq 0$ elevado a un exponente negativo $-k$ es igual al recíproco de la potencia a^k de exponente positivo, esto es,

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}$$

Con estos convenios se puede escribir, en todos los casos,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplos.

$$\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2$$

$$\frac{4^5}{4^5} = 4^{5-5} = 4^0 = +1$$

$$\frac{4^3}{4^5} = 4^{3-5} = 4^{-2} = \frac{1}{4^2}$$

Más adelante insistiremos de nuevo sobre estos convenios rela-

tivos a los exponentes cero y negativo, que son muy importantes en Álgebra.

EJERCICIO 11.

1º) Calcular los cocientes siguientes:

a) $(+8) : (+2)$

f) $(-64) : (+16)$

b) $(+10) : (-5)$

g) $(+50) : (-25)$

c) $(-20) : (-2)$

h) $(+24) : (+8)$

d) $(-18) : (+3)$

i) $(-\frac{3}{5}) : (+\frac{6}{25})$

e) $(-60) : (-4)$

j) $(+\frac{2}{3}) : (-\frac{5}{9})$

2º) Calcular:

a) $\frac{-4 \cdot 2}{+1 \cdot 4}$

g) $\frac{(+3)^6}{(+3)^3}$

ñ) $\frac{5^3}{5^6}$

b) $\frac{-800}{-40}$

h) 5^0

o) $27^{n-1} : 9^n$

c) $\frac{+3 \cdot 4}{-3}$

i) $(-3)^0$

p) $\frac{8^{n-1}}{2^n \cdot 4^{n-2}}$

d) $\frac{+4}{+20}$

j) 7^{-2}

q) $\frac{8^{n+3}}{2^{2n+3}}$

e) $\frac{-3 \cdot 5}{+3}$

k) 6^{-1}

l) $(-3)^{-2}$

r) $\frac{(4^{n-1})^n}{(4^{n+1})^n}$

f) $\frac{(-2)^4}{(-2)^2}$

m) $\frac{(+2)^2}{(+2)^6}$

n) $\frac{(-3)^2}{(-3)^2}$

s) $\frac{3^{2n} \cdot 9^{n-1}}{27^n}$

17. Desigualdad de números relativos.

17-1.

El número relativo a se dice *mayor* que el b y se escribe

$$a > b$$

cuando la diferencia

$$a - b = d$$

es un número *positivo*. En este caso se dice también que b es *menor* que a y se escribe

$$b < a.$$

Ejemplos.

$$+5 > +3 \text{ puesto que } (+5) - (+3) = +2$$

$$-2 > -6 \text{ puesto que } (-2) - (-6) = +4$$

$$+4 > 0 \text{ puesto que } (+4) - (0) = +4$$

$$0 > -3 \text{ puesto que } (0) - (-3) = +3$$

$$+\frac{3}{4} > -1 \text{ puesto que } (+\frac{3}{4}) - (-1) = +1\frac{3}{4}.$$

Los ejemplos anteriores muestran que:

De dos números positivos es mayor el de mayor valor absoluto.

De dos números negativos es mayor el de menor valor absoluto.

Cualquier número positivo es mayor que cero.

Cero es mayor que cualquier número negativo.

Todo número positivo es mayor que todo número negativo.

Resulta así para los números enteros la ordenación siguiente:

$$\dots < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3 < +4 < +5 < \dots$$

Es claro que el criterio de desigualdad que hemos dado aquí contiene como caso particular el dado en el parágrafo 6 para los números absolutos.

17-2.

Puesto que

$$(a - b) + (b - a) = a - b + b - a = 0$$

resulta que el número opuesto de $a - b$ es $b - a$; por tanto, cuando la diferencia $a - b$ es negativa, la diferencia $b - a$ es positiva, y por consiguiente, es $b > a$ ó $a < b$.

Como la sustracción de dos números relativos es siempre posible y el resultado es un número relativo, tendremos necesariamente, al comparar dos números a y b , uno de los siguientes casos:

1) $a - b$ es positivo; entonces es $a > b$.

2) $a - b = 0$; entonces es $a = b$.

3) $a - b$ es negativo; entonces es $a < b$.

Por tanto, dados dos números relativos a y b tiene lugar una y sólo una de las relaciones siguientes:

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b \quad (\text{ley de tricotomía}).$$

17-3.

Es también muy fácil demostrar que la desigualdad de números relativos tiene la propiedad *transitiva*, a saber:

Si $a > b$ y $b > c$, es $a > c$.

En efecto, $a > b$ y $b > c$ implican que los números $a - b$ y $b - c$ son positivos; por tanto, será también positiva su suma

$$(a - b) + (b - c) = a - b + b - c = a - c$$

de donde resulta que $a > c$.

Con igual facilidad se pueden demostrar las propiedades correspondientes a § 6-17 y § 6-18:

17-4. *Ley de monotonía de la suma.*

Si $a > b$ es $a + c > b + c$, cualquiera sea c .

Puesto que $a > b$, la diferencia

$$a - b = d$$

es positiva. La igualdad anterior puede también escribirse

$$a = d + b.$$

Sumando c en ambos miembros resulta

$$a + c = d + b + c = d + (b + c)$$

o bien

$$(a + c) - (b + c) = d$$

lo cual nos dice que la diferencia $(a + c) - (b + c)$ es también positiva; por consiguiente,

$$a + c > b + c.$$

17-5. *Ley de monotonía de la multiplicación.*

Si $a > b$ y es $c > 0$, se tiene $ac > bc$.

En efecto, multiplicando por c ambos miembros de la igualdad

$$a = d + b$$

se obtiene

$$ac = (d + b)c = dc + bc$$

luego

$$ac - bc = dc$$

y el producto dc es positivo por ser positivos ambos factores; por tanto,

$$ac > bc.$$

Ejemplos. De

$$[1] \quad -3 > -7$$

se obtiene, sumando $+2$ en ambos miembros,

$$-1 > -5.$$

Si en vez de sumar $+2$ sumamos -2 , resulta:

$$-5 > -9.$$

Multiplicando ambos miembros de $[1]$ por $+4$ se obtiene

$$-12 > -28$$

que es también cierta.

17-6.

Por brevedad, omitiremos la demostración de las siguientes propiedades de las desigualdades:

I. Si $a > b$, $a - c > b - c$.

II. Si $a > b$, $c - a < c - b$.

III. Si $a > b$ y $c > 0$, $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

IV. Si $a > b$ y $c < 0$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$).

EJERCICIO 12.

1º) Comprobar las siguientes desigualdades aplicando la definición:

a) $+1 > -1$

f) $-3 < -1$

b) $-4 > -7$

g) $+4 < +7$

c) $+5 > 0$

h) $-4 < +4$

d) $0 > -2$

i) $-6 < 0$

e) $+\frac{3}{2} > +\frac{1}{2}$

j) $-2 \cdot 3 < +1 \cdot 7$

De $+5 > -2$ y $-2 > -6$ decir qué desigualdad resulta por la propiedad transitiva.

3º) De la desigualdad $+3 > -2$ obtener otras por aplicación de las leyes de monotonía de la suma y de la multiplicación.

4º) Si $a > b$ y $c > d$, probar que $a + c > b + d$.

5º) Si $a > b$ y $c < 0$, probar que $ac < bc$.

6º) De $a > b$ y $c > d$, ¿se puede inferir $ac > bd$?

18. Uniformidad de las operaciones con números relativos.

Las operaciones con números relativos estudiadas anteriormente, a saber, suma, sustracción, multiplicación, potenciación y división, son *uniformes*. Con esto, lo que quiere significarse es que el resultado de someter dos números relativos a cualquiera de estas operaciones es *único*. No sucede así con otras operaciones, por ejemplo, la extracción de raíz cuadrada*. Así, en el sistema de los números relativos el número $+25$ tiene dos raíces cuadradas $+5$ y -5 , ya que

$$(+5)^2 = +25 \quad \text{y} \quad (-5)^2 = +25.$$

La uniformidad de las operaciones mencionadas puede también expresarse del modo siguiente:

Si $a = b$ y $c = d$ se tiene

$$\text{I.} \quad a + c = b + d$$

$$\text{II.} \quad a - c = b - d$$

$$\text{III.} \quad ac = bd$$

$$\text{IV.} \quad a^n = b^n$$

$$\text{V.} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Esto es, sumando, restando, multiplicando, ... miembro a miembro igualdades de números relativos se obtienen nuevas igualdades.

Conviene notar bien que la relación $a = b$ significa en realidad que los símbolos literales a y b representan *el mismo número relativo*; por tanto, una igualdad como $a + c = b + d$ lo que expresa es que el resultado de la operación $a + c$ es *el mismo número* que el de la operación $b + d$.

* La radicación será estudiada más adelante (cap. 14)

La uniformidad de la suma y multiplicación (y, por tanto, de la potenciación) es consecuencia inmediata de los §§ 6-5, 6-10, 7-3 y de las definiciones dadas de suma y multiplicación en párrafos 12 y 14.

Como las operaciones de sustracción y división se reducen en el sistema de los números reales relativos a las de suma y multiplicación (según vimos en los párrafos 13 y 16), se infiere inmediatamente la unicidad de estas operaciones una vez establecida la existencia para cada número a de un solo opuesto a' o de un solo inverso $1/a$.

También, utilizando las leyes de monotonía, se puede probar directamente la unicidad de la diferencia y del cociente. Así, por ejemplo, es imposible que tengamos

$$[1] \quad a + d = b$$

y

$$[2] \quad a + d' = b$$

siendo, por ejemplo,

$$[3] \quad d < d'$$

pues de [1] y [2] resulta

$$a + d = a + d'$$

y de [3] se deduciría, sumando a en ambos miembros,

$$a + d < a + d'$$

lo que es contradictorio.

19. Promedio de varios números relativos.

Para hallar el promedio usual o media aritmética de varios números absolutos se divide su suma por el número de sumandos. Por ejemplo, si un alumno obtiene en 4 exámenes parciales las calificaciones siguientes: 70, 82, 88, 64, su *promedio* lo calcularía así:

$$\frac{70 + 82 + 88 + 64}{4} = \frac{304}{4} = 76.$$

Otro ejemplo. Si las máximas temperaturas diarias durante

una semana son 28° , 30° , 32° , 31° , 29° , 26° y 27° , todas sobre cero, ¿cuál es el promedio de estas temperaturas?

Tendremos

$$\frac{28^\circ + 30^\circ + 32^\circ + 31^\circ + 29^\circ + 26^\circ + 27^\circ}{7} = 29^\circ.$$

Para números relativos es conveniente mantener el mismo concepto de promedio, entendiendo que la suma se efectúa de acuerdo con las reglas dadas para estos números.

Por definición, pues, se entiende por *promedio* de varios números relativos el resultado de dividir su suma por el número de ellos.

Así, por ejemplo, el promedio de $+4$ y -4 es

$$\frac{4 - 4}{2} = 0,$$

el promedio de $+6$ y -4 es

$$\frac{+6 - 4}{2} = +1,$$

y el promedio de -6 , -8 y -13 es

$$\frac{-6 - 8 - 13}{3} = -9.$$

Otro ejemplo. Si las máximas temperaturas diarias durante una semana de invierno en Bélgica son $+3^\circ$, $+1^\circ$, -6° , -7° , -2° , 0° , -3° , ¿cuál es el promedio de estas temperaturas?

Tendremos

$$\frac{3^\circ + 1^\circ - 6^\circ - 7^\circ - 2^\circ + 0^\circ - 3^\circ}{7} = -2^\circ.$$

Este instructivo ejemplo y otros que hemos considerado en el transcurso del capítulo permiten apreciar la gran sencillez y uniformidad que en el tratamiento de problemas diversos introduce el uso de los números con signos. Esto se hará cada vez más evidente en el desarrollo de esta obra y en las aplicaciones del Álgebra a la Geometría, a la Física, a la Estadística y a otras ciencias.

EJERCICIO 13.

1º) Hallar los promedios de las siguientes series de lecturas termométricas:

- a) $18^\circ, 21^\circ, 16^\circ, 23^\circ$.
- b) $-6^\circ, -10^\circ, -8^\circ, -5^\circ, -2^\circ$.
- c) $+2^\circ, -3^\circ, -4^\circ, +8^\circ, +4^\circ, -1^\circ$.
- d) $-15^\circ, -10^\circ, -6^\circ, -3^\circ, 0^\circ, +5^\circ, +8^\circ$.
- e) $-4^\circ, +3^\circ, +3^\circ, -2^\circ, -4^\circ, +1^\circ$.

2º) Hallar el promedio de dos lecturas de -4° y tres lecturas de $+2^\circ$.

3º) Hallar el promedio de tres lecturas de $+5^\circ$, tres lecturas de -3° y dos lecturas de -4° .

EJERCICIO 14 (repaso).

1º) Dar ejemplos de magnitudes relativas.

2º) Señalar varios casos prácticos en los cuales sea conveniente el uso de números positivos y negativos.

3º) Desde el punto de vista puramente aritmético, ¿por qué es conveniente la introducción de los números negativos?

4º) Sobre una recta marcar un origen y el punto correspondiente a $+1$. Señalar los puntos cuyas abscisas son los números relativos siguientes:

$$-4,5, +3,7, -\frac{2}{3}, +6,1.$$

5º) Dar los valores absolutos de los siguientes números:

- a) -7
- b) $+4,1$
- c) 0
- d) $-2\frac{1}{3}$.

6º) Hallar los opuestos de los siguientes números:

- a) -5
- b) $+2$
- c) $-\frac{1}{2}$
- d) $5,6$.

7º) Hallar los inversos o recíprocos de los siguientes números:

- a) -4
- b) $+\frac{1}{3}$
- c) $-\frac{4}{5}$
- d) -1 .

8º) Calcular las sumas siguientes:

- a) $-3 + 4 - 5 + 2 - 7 - 1$
- b) $10 - 15 - 8 + 20 - 6 - 2 + 4$.

9º) Calcular las diferencias siguientes:

- a) $(-5) - (-8)$
- b) $(+3) - (+7)$
- c) $(+2) - (-2)$
- d) $(-3) - (+5)$.

10º) Calcular los productos siguientes:

- a) $(-8)(+3)\left(-\frac{1}{2}\right)(-6)\left(+\frac{1}{4}\right)$
 b) $(-3)(-2)(-1)(+1)(+2)(+3)$
 c) $\left(+\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(+\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{5}{6}\right).$

11º) Calcular las potencias siguientes:

- a) $(-3)^4$ c) $(+3)^3$ f) $(2^2)^3$
 b) $(-2)^7$ d) $(+4)^2$ g) $2^{n+1} \cdot 4^{n-2} \cdot 8^{3-n}.$
 e) $4^3 \cdot 4^2 \cdot 4^4$

12º) Calcular los cocientes siguientes:

- a) $(-8) : (+4)$ d) $(-18) : (+2)$
 b) $(+12) : (-3)$ e) $3^5 : 3^2$
 c) $(-16) : (-4)$

13º) Hallar el valor de

- a) 5^{-2} b) $(-3)^{-3}$ c) $(-2)^0$ d) $(+2)^0.$

14º) Hallar los promedios de los siguientes conjuntos de números:

- a) $-10, -6, +9, +5, +3, -1$
 b) $+5, +4, +2, 0, -5, -3, -10.$

15º) Si a, b, c son números relativos cualesquiera, probar que de $a + c = b + c$ se deduce $a = b$ (ley de cancelación de la suma).

16º) Si a, b son números relativos cualesquiera y $c \neq 0$, probar que de $ac = bc$ se deduce $a = b$ (ley de cancelación del producto).

17º) Probar que

$$a - b = (a + k) - (b + k) = (a - k) - (b - k).$$

18º) Utilizando el ejercicio anterior probar que

$$\begin{aligned} a - (b + c) &= a - b - c \\ a - (b - c) &= a - b + c. \end{aligned}$$

19º) Probar que

$$(a^m b^n)^p = a^{mp} b^{np}$$

20º) Probar que de la igualdad

$$x + a - b = c$$

se deduce esta otra

$$x = c - a + b.$$

Enunciar una regla para pasar números de un miembro a otro de una igualdad.

TEST 2.

1º) Sumar:

a)
$$\begin{array}{r} +15 \\ -26 \\ \hline \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} -12 \\ -22 \\ \hline \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} -34 \\ +25 \\ \hline \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} +8 \\ +18 \\ \hline \end{array}$$

2º) Restar:

a)
$$\begin{array}{r} -11 \\ +8 \\ \hline \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} -3 \\ -10 \\ \hline \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} +21 \\ -9 \\ \hline \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} +1,5 \\ +40 \\ \hline \end{array}$$

3º) Multiplicar:

a)
$$\begin{array}{r} -9 \\ -6 \\ \hline \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} -7 \\ +3 \\ \hline \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} +8 \\ +4 \\ \hline \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} +7 \\ -5 \\ \hline \end{array}$$

4º) Dividir:

a)
$$\begin{array}{r} -40 \\ +5 \\ \hline \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} -32 \\ -4 \\ \hline \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} +2 \\ -20 \\ \hline \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} +14 \\ +2 \\ \hline \end{array}$$

5º) Elevar a potencia:

a)
$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

b) 4^{-1}

c) $(-5)^0$

d) $\frac{1}{3^{-2}}$

6º) Hallar el promedio de tres lecturas termométricas de -5° y dos lecturas de $+15^\circ$.

7º) Decir cuál de los siguientes números es el opuesto de $+\frac{2}{5}$:

a) $+\frac{5}{2}$

b) $-\frac{5}{2}$

c) $-\frac{2}{5}$

8º) Decir cuál de los siguientes números es el recíproco de -3 :

a) $+3$

b) $-\frac{1}{3}$

c) $+\frac{1}{3}$

d) $+9$

9º) Un ascensor parte del 8º piso de una casa, sube 4 pisos, baja 7 pisos, sube 12 pisos y baja 9. ¿En qué piso se encuentra ahora? Obtener la respuesta utilizando números positivos y negativos para representar los movimientos realizados; hállese la suma de estos números.

10º) Un avión que vuela en dirección norte-sur pasa por una ciudad C a las 12 h a una velocidad (constante) de 300 km por hora. Con el convenio de considerar la velocidad positiva cuando el avión vuela hacia el norte, negativa cuando vuela hacia el sur y las horas positivas cuando son p. m. y negativas cuando son a. m. (9 a. m. debe escribirse -3 , es decir, 3 horas antes del mediodía), determinar la posición del avión en los siguientes casos:

a) a las 4 p. m. si se dirige hacia el sur.

b) a las 8 a. m. si se dirige hacia el sur.

c) a las 4 p. m. si se dirige hacia el norte.

d) a las 8 a. m. si se dirige hacia el norte.

CAPÍTULO 3.

TECNICISMO ALGEBRAICO.

20. Monomios.

Todo número, letra (símbolo numérico) o el producto o cociente de tales números y letras recibe el nombre de *monomio*.

Ejemplo.

Son monomios: -3 , a , $2a$, $3a^2b$, $\frac{-2ab}{c}$.

21. Coeficientes.

En un monomio que contenga varios factores cada factor o grupo de factores se llama *coeficiente* de los restantes.

Ejemplo.

En el monomio

$$\frac{2}{3}abc$$

$\frac{2}{3}$ es coeficiente de abc ; también es a coeficiente de $\frac{2}{3}bc$,
 b coeficiente de $\frac{2}{3}ac$, etc.

Además, se considera $\frac{2}{3}bc$ como coeficiente de a ; $\frac{2}{3}ac$ como coeficiente de b , etc.

Cuando se habla de *coeficiente* de un monomio se entiende generalmente su factor numérico (salvo observación en contrario). Así, por ejemplo, en $-2x^3y$ se dice que el coeficiente es -2^* . Nótese que el signo se incluye en el coeficiente.

* Dicho de un modo más explícito, lo que se quiere expresar es que el coeficiente de los factores literales del monomio es -2 .

El coeficiente $+1$ ó el -1 puede siempre sobrentenderse en los monomios que no tienen factores numéricos expresos.

Ejemplos.

En abc^2 ó $+1abc^2$ el coeficiente es $+1$.

En $-x$ ó $-1x$ el coeficiente es -1 .

22. Exponentes.

Cuando en un monomio hay factores repetidos las potencias correspondientes se indican por medio de *exponentes*, como hemos visto en algunos ejemplos anteriores.

Ejemplo.

En vez de $8aaaabb$ se escribe $8a^3b^2$.

Cuando el factor sólo aparece una vez se sobrentiende que su exponente es 1, en virtud del convenio

$$a^1 = a$$

que establecimos en § 15-1. Conviene recordar aquí también los convenios adoptados en 16-4, a saber:

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Mediante el uso de los exponentes negativos se puede expresar cualquier monomio en forma de producto.

Ejemplo.

$$\frac{5ab^3}{c^2} = 5ab^3c^{-2}$$

En el Álgebra es muy importante tener siempre presente las leyes fundamentales:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

establecidas en § 15-2 y § 16-4, las cuales son válidas para exponentes enteros cualesquiera.

Ejemplos.

$$x^3 \cdot x^2 = x^5$$

$$b^2 \cdot b = b^2 b^1 = b^3$$

$$c^3 \cdot c^{-2} = c^1 = c$$

$$a^4 \cdot a^{-4} = a^0 = 1$$

$$\frac{b^5}{b^3} = b^2$$

$$\frac{b^3}{b^5} = b^{-2}$$

Los matemáticos anteriores a Descartes (1637) escribían aa en vez de a^2 , aaa en vez de a^3 , y esta notación "antigua" se encuentra aún en escritos de mediados del siglo XVIII. Wallis (1655) fué el primero en explicar claramente el significado de los exponentes cero y negativo (y también del exponente fraccionario, del cual nos ocuparemos más adelante). Después de haber sido usados por Newton se generalizó su empleo.

23. Binomios.

La suma o diferencia indicada de dos monomios recibe el nombre de *binomio*.

Ejemplos.

Son binomios,

$$2 + 3$$

$$x - 1$$

$$a + bc$$

$$4x^3y - 2z^2.$$

Como la diferencia $a - b$ puede también escribirse $a + (-b)$ diremos brevemente: *binomio* es la suma algebraica de dos monomios.

Se llama *suma algebraica* a la suma de números relativos o de símbolos que representan números relativos (ver 12-6).

24. Trinomios.

La suma algebraica indicada de tres monomios recibe el nombre de *trinomio*.

Ejemplo.

Son trinomios,

$$3 + 8 - 7$$

$$a - b + c$$

$$3x^2 - 2x + 5$$

$$4x^3 + 2x^2y + y^4.$$

25. Polinomios.

La suma algebraica indicada de más de tres monomios recibe el nombre de *polinomio*.

Ejemplos.

$$4 - 2 + 3 - 1$$

$$a + b + c + d$$

$$x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 7x + 8$$

$$a^5 - 4ab^2 - 3ab^3 + 6ab^{-2} + c^{-1}$$

Por comodidad, en muchas cuestiones que siguen, ampliaremos el concepto de polinomio dado anteriormente y comprenderemos también a los *trinomios*, *binomios* y aun *monomios* bajo la denominación general de *polinomio*.

Se dice que un polinomio es *entero* cuando los monomios que lo componen no contienen divisores literales o factores literales elevados a exponentes negativos.

Así, por ejemplo, de los polinomios escritos precedentemente los tres primeros son enteros, pero el cuarto no.

Puede también decirse que un polinomio es *entero* cuando los símbolos literales que en él figuran están sometidos únicamente a las operaciones de suma, resta, multiplicación y elevación a potencia de exponente natural.

Otros ejemplos. Son polinomios enteros:

$$x^2 + x + 1$$

$$3x^2 - 5x + 6y + z.$$

26. Términos.

Los monomios que componen un polinomio se llaman también *términos* del polinomio.

Así, por ejemplo, el polinomio

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

tiene cuatro términos, a saber:

$$\begin{aligned} & x^3 \\ & - 3x^2y \\ & + 3xy^2 \\ & - y^3 \end{aligned}$$

Cuando no se pone signo delante del primer término se sobreentiende que es el positivo (+).

El signo que precede cada término se considera que forma parte del coeficiente numérico del mismo. Recuérdese que el coeficiente 1 no suele escribirse, por brevedad.

Ejemplos. El coeficiente numérico del término

$$- 3x^2y \quad \text{es} \quad - 3$$

y el del término

$$- y^3 \quad \text{es} \quad - 1.$$

Observación. De acuerdo con los convenios establecidos, el escribir un polinomio en la forma

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

no es sino una manera breve de expresar la suma algebraica

$$(+ 1x^3) + (- 3x^2y) + (+ 3xy^2) + (- 1y^3).$$

La palabra término suele usarse en general como sinónima de *monomio*, aún cuando se le considere aisladamente, es decir, sin que forme parte de un polinomio.

27. Términos semejantes.

Puesto que un término con coeficiente 0 se reduce a 0, y en un término que contenga un factor o divisor literal con exponente 0 se puede sustituir dicho factor o divisor por 1, consideraremos en la definición que sigue términos con coeficientes distintos de cero, y exponentes de los factores o divisores literales, si los hay, también distintos de cero.

Definición. Dos términos son semejantes cuando son ambos numéricos o cuando ambos se componen de los mismos factores o divisores literales con exponentes correspondientes iguales. En este último caso los coeficientes numéricos pueden ser números cualesquiera distintos de cero.

Ejemplos. Son términos semejantes:

$$\begin{array}{rcl} + 5 & y & - 2 \\ - 3a & y & 4a \\ 2ab^2c^3 & y & 3ab^2c^3 \\ - 4xy^{-1}z^{-2} & y & - 2xy^{-1}z^{-2} \end{array}$$

En cambio no son semejantes:

$$- 4axy^2 \quad y \quad - 4ax^2y$$

ya que el factor x está en el primer monomio con exponente 1 y en el segundo con exponente 2; además, el factor y figura en el primer monomio con exponente 2 en tanto que en el segundo figura con exponente 1.

28. Reducción de términos semejantes.

Cuando en un polinomio figuran términos semejantes, éstos se pueden reducir a un solo término.

En efecto, si dichos términos son numéricos basta hacer la suma algebraica de los mismos; y si tienen parte literal, basta efectuar la suma algebraica de sus coeficientes y conservar la parte literal (en virtud de la ley distributiva de la multiplicación).

Ejemplos.

$$3 + 5 - 2 = 6 ;$$

$$3a + 4a = (3 + 4)a = 7a ;$$

$$5x^2 - 2x^2 - 4x^2 + x^2 = (5 - 2 - 4 + 1)x^2 = 0 \cdot x^2 = 0 ;$$

$$- 6abc + 10abc - 8abc = (2 - 6 + 10 - 8)abc = - 2abc ;$$

$$- 3a^2b^{-1} + 5a^2b^{-1} + a^2b^{-1} = (- 3 + 5 + 1)a^2b^{-1} = 3a^2b^{-1}$$

$$\frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{4}xy^2 + \frac{3}{2}xy^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \right) xy^2 = \frac{7}{4}xy^2 .$$

Cuando los coeficientes son pequeños, su suma algebraica se efectúa mentalmente y se escribe el resultado directamente, como se muestra en los ejemplos que siguen.

Ejemplos.

$$8x - 2x + 4x - 6x = 4x$$

$$-9y + 2y + 6y - 5y = -6y$$

$$\frac{3}{a} + \frac{2}{a} - \frac{4}{a} = \frac{1}{a}$$

Nótese en este último ejemplo que

$$\frac{3}{a} + \frac{2}{a} - \frac{4}{a} = 3 \frac{1}{a} + 2 \frac{1}{a} - 4 \frac{1}{a} = (3 + 2 - 4) \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

o bien

$$\frac{3}{a} + \frac{2}{a} - \frac{4}{a} = 3a^{-1} + 2a^{-1} - 4a^{-1} = a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Cuando en un polinomio figuran diferentes clases de términos semejantes se agrupan los de las mismas clases y se procede a la reducción de cada grupo. Esto es posible en virtud de las leyes conmutativa y asociativa de la suma.

Ejemplos.

$$3a - 5 - 8a + 2 + 2a = (3a - 8a + 2a) + (-5 + 2) = -3a - 3;$$

$$6a + 3b + 8b - 2a - b = (6a - 2a) + (3b + 8b - b) = 4a + 10b;$$

$$-2x^2y + 5z + 4x^2y = (2x^2y + 4x^2y) + 5z = 2x^2y + 5z;$$

$$\begin{aligned} & x^3 - 8 + 2x^2 - 4x^2 + 6x - 4 + 2x - 3x^3 + 5x^2 + 6x^3 \\ &= (x^3 - 3x^3 + 6x^3) + (2x^2 - 4x^2 + 5x^2) + (6x + 2x) + (-8 - 4) \\ &= 4x^3 + 3x^2 + 8x - 12. \end{aligned}$$

Los términos no semejantes no pueden reducirse, es decir, no pueden ser combinados en un solo término.

29. Polinomio reducido.

Un polinomio se dice *reducido* cuando carece de términos semejantes y de términos con coeficientes nulos.

Ejemplos. Son polinomios reducidos:

$$x^2 - 5x + 6$$

$$a - b + c$$

$$3x - 2y + 6z^2$$

En cambio, no está reducido el polinomio

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 5x^2 - 3x + 6 - x.$$

Si efectuáramos su reducción, tendríamos:

$$\begin{aligned} & x^3 + (-2x^2 - 5x^2) + (4x - 3x - x) + 6 \\ &= x^3 - 7x^2 + 0 \cdot x + 6 = x^3 - 7x^2 + 6. \end{aligned}$$

EJERCICIO 15.

Reducir los polinomios siguientes:

1º) $-5 + 6 + 2 - 4.$

2º) $3a - 8a + 2a + 6a - 5a.$

3º) $-4a + 11a - 2a - 5a + 8a + 3a.$

4º) $2b + 5b - 6b + 3b - 7b.$

5º) $7x - 2x + 6x - 10x + 4x - 5x - x.$

6º) $3c + 5c + 4c - 8c - 6c + c.$

7º) $3a - 8a + 2b - 4a + 6b + 3b - a.$

8º) $x^2 - 3x + x^2 + 6 + 2x^2 - 5x + 2 - x + 3.$

9º) $x + x^2 + x^3 + 1 - 2x^2 - 5x - 3 + 2x^3 + 6x^2 - 2x.$

10º) $y^4 - y^2 + 6 - 3y^4 + 2y^2 - 8 + y^4 - 3y^2.$

11º) $3ab + 2ac - 2bc + 6ac + 2ab + 4ac - 5ab.$

12º) $3a^2b - 2ab^2 + 5ab^2 + 6a^2b + 3ab^2 - 4a^2b.$

13º) $6abc - 5a^2bc + 3abc - 7abc + 8a^2bc.$

14º) $3ax + 2ay + 6ax - 4ay + ax + 2ay + 3ay.$

15º) $-4 + 3x^2y^2z^2 + 5 + 2x^2y^2z^2 - 6 - 8x^2y^2z^2 + 6x^2y^2z^2.$

16º) $a^3 + 2a^2b - b^3 + 3ab^2 + 2a^3 - 6a^2b + 2b^3.$

17º) $x^2 - 2xy + y^2 + 3xy + 4x^2 - 5y^2 + 6xy.$

18º) $2x^2yz + 6xyz + 2xyz^2 + 3x^2yz - 5xyz - xyz^2.$

19º) $a^2bc + 2ab^2c + 4abc^2 - 5ab^2c + 6a^2bc - 7abc^2.$

20º) $z^2 - z^3 + 2z + 4 - 3z^2 + 4z^3 + 8 - 5z.$

21º) $2ab^{-1} + 5a^{-1}b + 6a^{-2}b^{-3} + 6ab^{-1} + 3a^{-1}b.$

22º) $5x^{-2}y + 3xy^{-2} - 2x^{-2}y + 3x^{-2}y + 4xy^{-2}.$

$$23^\circ) \quad \frac{2}{3}xy - \frac{1}{6}xy + \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{3}{4}xy + 2x^2y^2.$$

$$24^\circ) \quad x^{-2} + x^{-1} + 2x^0 + 3x + 6x^{-1} + 2x^{-2} + 4x^0.$$

$$25^\circ) \quad 4x^n y^m + 2x^n y^m - 5x^2 y^m - 3x^n y^m + 6x^2 y^m.$$

30. Grado de un monomio.

Se llama *grado* de un monomio al número de factores literales que contenga disminuido en el número de divisores literales.

El grado de un monomio es, por consiguiente, un entero positivo, negativo o nulo, según los casos.

Si el monomio no tiene factores o divisores literales su grado es 0.

Ejemplos. El monomio $2abc$ es de grado 3,

$$-6a^2b^3 = -6aabb^3 \text{ es de grado 5,}$$

$$3\frac{ab}{c} \text{ es de grado 1,}$$

$$4\frac{a^3b^2}{c^2d} \text{ es de grado 2,}$$

$$5\frac{ab}{cd} \text{ es de grado 0,}$$

$$2\frac{a}{bc} \text{ es de grado } -1,$$

$$-2\frac{x^2}{y^2z^3} \text{ es de grado } -3,$$

$$8 \text{ es de grado 0.}$$

En general, para hallar el grado de un monomio basta calcular la suma algebraica de los exponentes de los factores literales, escribiendo previamente los divisores en forma de factores con exponentes negativos. Un factor que figura una sola vez en el producto debe considerarse con exponente 1.

Ejemplos. El monomio

$$-4x^3y^2z \text{ es de grado } 3 + 2 + 1 = 6,$$

$$3\frac{x^3y^4}{z^2} = 3x^3y^4z^{-2} \text{ es de grado } 3 + 4 - 2 = 5,$$

$$5 \frac{x^2 y^3}{z^3 u^2} = 5x^2 y^3 z^{-3} u^{-2} \text{ es de grado } 0.$$

Cuando el grado de un monomio es un entero positivo, suele indicarse el grado mediante el número ordinal correspondiente. Así, por ejemplo, se dice que $x^2 y$ es un monomio de *tercer grado*, en vez de decir que es de grado 3.

Análogamente, $5x^2 y z$ es de *cuarto grado*, etc.

A veces se considera el grado de un monomio con respecto a alguno o algunos de los factores o divisores literales que contiene. Pero en este caso es preciso indicarlo expresamente.

Ejemplo.

— $8x^2 y^3 z^4$ es de 2º grado con respecto a x ,
 + $4xy^3$ es de 3º grado con respecto a y .

Cuando no se advierte lo contrario, se entiende que para dar el grado se toman en consideración *todos* los factores o divisores literales del monomio.

EJERCICIO 16.

Hallar el grado de los monomios siguientes:

1º) -5 .

6º) $2a^2 b c d^{-3}$.

2º) $3a$.

7º) $3x^2 y^2 / z^2$.

3º) $4ab$.

8º) $-5x / y z^3$.

4º) $-xy^2 z$.

9º) $2a^n b^n$.

5º) $\frac{3a}{b}$.

10º) $\frac{x^{n-2} y^{n+2}}{z^3}$.

31. Grado de un polinomio.

Se llama *grado* de un polinomio *reducido* al mayor de los grados de los términos que lo componen, excepto en el caso en que todos los términos sean de igual grado, o haya varios de grado máximo, en cuyo caso este grado común será el grado del polinomio.

Ejemplos.

$x^3 - 5x^2 + 8$ es de tercer grado.

$x^2 + 2xy + y^2$ es de segundo grado.

$x^4 + 2x^2 + 1 + \frac{3}{x}$ es de grado cuarto.

$\frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{7}{x^3}$ es de grado -1 .

$4 + 2x^{-1} + 3x^{-2}$ es de grado 0 .

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ es de tercer grado.

EJERCICIO 17.

Decir los grados de los polinomios siguientes:

1º) $x + x^2$.

7º) $2 + x^{-1} + x^{-3}$.

2º) $1 + 3x - x^3 + x^2$.

8º) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{3}{x^3}$.

3º) $x^4 - x + 2$.

9º) $3abc + 2a + 3ab^2 + 4ab$.

4º) $x^3 + 2x + 1 + x^{-2}$.

10º) $1 - 2xy + 3x^2y^2 + 6x^3y$.

5º) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

6º) $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$.

32. Polinomio homogéneo.

Se dice que un polinomio es *homogéneo* cuando todos sus términos tienen el mismo grado.

Ejemplos.

$$2 + 3 - 4$$

$$x - y + z$$

$$x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^4 - x^2y^2 + y^4$$

$$a^{-3} + a^{-2}b^{-1} + a^{-1}b^{-2} + b^{-3}.$$

Cuando en el polinomio hay términos de grados distintos puede llamarsele *heterogéneo*, pero esta denominación es raramente usada.

33. Polinomio ordenado.

Un polinomio se dice *ordenado* con respecto a una letra (llamada letra *ordenatriz*) cuando sus términos se disponen de modo que los exponentes de esta letra aparezcan en orden creciente o decreciente (de izquierda a derecha).

Ejemplos.

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 8$$

es un polinomio ordenado en potencias descendentes de x .

$$5 + 2x + 3x^2 - 6x^3 + x^4$$

es un polinomio ordenado en potencias ascendentes de x .

$$x^3 + x^2y + 3xy^2 - y^3$$

es un polinomio ordenado con respecto a x en potencias descendentes; también está ordenado con respecto a y , pero en potencias ascendentes.

Nótese en los ejemplos anteriores que en los términos que no contienen x se puede suponer que x figura con exponente 0.

No todo polinomio es ordenable con respecto a determinada letra que contengan sus términos. Por ejemplo, $x^2y + x^2z + x^2yz$ no es ordenable con respecto a x .

EJERCICIO 18.

1º) Ordenar los polinomios siguientes en potencias descendentes del factor literal que figura en sus términos:

a) $3 + x^2 - 4x$.

d) $z + z^2 - z^5 - z^4 + 2z^3 - 8$.

b) $-3x + 2x^3 - 5x^2 + 8$.

e) $x^3 + x^{-2} + 2x^{-1} - 5 + 3x^2 - 2x$.

c) $2y - 6 + y^4 - 9y^2 + y^3$.

2º) Ordenar los siguientes polinomios en potencias ascendentes:

a) $3x - 5 + x^3 - 6x^2$.

d) $z^6 - z^4 + 2z^5 - 3 + 2z - z^2$.

b) $x^5 - 2x^3 + 1 - 4x$.

e) $z^{-1} + 6 + z^2 + 3z^{-2} + z$.

c) $y^2 - y^4 + y^3 + 2 + y$.

3º) Ordenar los siguientes polinomios homogéneos en potencias descendentes de x :

a) $xy + y^2 + x^2$.

d) $b^5 + b^4x + x^5 + x^4b - x^3b^2 + x^2b^3$.

b) $+x^2y + 2xy^2 + x^3 + y^3$.

e) $4x^2y - 5xy^2 + x^3 - y^3 + x^{-1}y^4$.

c) $x^4 - 6a^2x^2 + 4ax^3 - 2a^3x + a^4$.

34. Expresiones algebraicas.

Se llama *expresión algebraica racional* a toda combinación de números y símbolos numéricos (letras), o de letras solamente, mediante las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y elevación a potencia.

Ejemplos.

$$a, \quad 3x^4, \quad 4y^2 - 5y + 8, \quad \frac{x+2}{a+b},$$

$$5xy^{-2}, \quad x^2 + 3x + 8 + \frac{1}{x}$$

Una expresión algebraica racional es *entera* cuando en ella no interviene la operación de dividir o la elevación a potencia con exponente negativo, como en los tres primeros ejemplos anteriores; en caso contrario, la expresión algebraica se dice *fraccionaria*.

Más adelante consideraremos también expresiones algebraicas *irracionales*, que son aquellas en que interviene la operación de extracción de raíz o radicación.

35. Fórmulas.

Son igualdades entre expresiones algebraicas que expresan algún principio, regla o resultado general de índole matemática, física o relativo a cualquier otra ciencia.

Así, por ejemplo, la regla:

Para hallar el área de un triángulo tómese la mitad del producto de las medidas de su base y de su altura,

se expresa brevemente mediante el simbolismo algebraico por la fórmula

$$A = \frac{1}{2}bh$$

en la cual b representa la medida de la base, h la medida de la altura y A la medida del área con respecto a la unidad correspondiente. Por ejemplo, si b y h se expresan en cm el área A resultará en cm^2 .

Algunas fórmulas importantes.*

1. Interés simple:

$$i = \frac{crt}{100}$$

* Muchas de las fórmulas que damos a continuación como ejemplo son, sin duda, ya conocidas del lector; otras las encontrará en estudios posteriores de Matemática y de Física a los cuales sirve de antecedente el curso de Álgebra.

2. Área de un rectángulo:

$$A = bh$$

3. Área de un triángulo:

$$A = \frac{1}{2}bh$$

4. Área de un círculo:

$$A = \pi r^2$$

5. Longitud de la circunferencia:

$$C = 2\pi r$$

6. Volumen de un ortoedro:

$$V = abc$$

7. Volumen de un cilindro:

$$V = \pi r^2 h$$

8. Volumen de una pirámide:

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

9. Volumen de un cono:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

10. Volumen de la esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

11. Superficie de la esfera:

$$S = 4\pi r^2$$

12. Ley del movimiento uniforme:

$$e = vt$$

13. Caída de los cuerpos en el vacío:

$$e = \frac{1}{2}gt^2$$

14. Fórmula de las lentes:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

15. Ley de la gravitación universal:

$$F = k \frac{mm'}{r^2}$$

36. Valor numérico de una expresión algebraica.

Las letras que figuran en una expresión algebraica son símbolos numéricos, es decir, representan números. Cuando estas letras se sustituyen por números particulares y se efectúan las operaciones indicadas, el valor resultante se llama *valor numérico* de la expresión algebraica.

Evaluar una expresión algebraica es determinar su valor numérico.

Ejemplo. El valor numérico de la expresión

$$2ab + c$$

para $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$ es

$$2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) = 4 - 1 = 3.$$

En cambio, si atribuimos a las letras los valores

$$a = 4, \quad b = -1, \quad c = 2$$

se obtiene

$$2 \cdot 4(-1) + 2 = -8 + 2 = -6.$$

Como las operaciones que intervienen en una expresión algebraica racional son uniformes, el valor numérico de una expresión algebraica racional es único para un sistema dado de valores de las letras que en ella figuran. Ahora bien, para sistemas diferentes de valores de las letras los valores numéricos obtenidos son en general distintos, como muestra el ejemplo anterior.

Debido a que la división por cero no está definida (véanse §§ 7-8 y 16-2) hay expresiones algebraicas que carecen de valor numérico para ciertos sistemas de valores de las letras que las componen.

Ejemplos.

$$\frac{1}{x-3} \text{ carece de valor numérico para } x = 3;$$

$$\frac{a+b}{a-b} \text{ carece de valor numérico para } a = b = 1, \text{ para } a = b = 2, \text{ etc.}$$

37. Orden de las operaciones indicadas en una expresión algebraica.

Para hallar correctamente el valor numérico de una expresión algebraica es importante tener en cuenta los siguientes convenios relativos al orden en que deben efectuarse las operaciones indicadas:

1º) Si la expresión contiene potencias, éstas se efectúan primero.

2º) Después se efectúan las multiplicaciones y divisiones en el orden en que se presenten.

3º) Finalmente se efectúan las sumas y restas, en cualquier orden.

4º) Si la expresión contiene paréntesis, las operaciones incluidas en los paréntesis deben ser efectuadas primero aplicando las reglas anteriores.

La costumbre ha sancionado el siguiente caso de excepción de la regla 2ª: cuando se tiene una expresión de la forma $6ab : 3b$ se entiende que esto significa

$$\frac{6ab}{3b} \text{ y no } \frac{6ab}{3} \cdot b.$$

Para evitar ambigüedades es preferible escribir los cocientes en forma fraccionaria.

Ejemplos.

1. Hallar el valor numérico de $a + bc$ para $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$.

Se tiene

$$4 + (2)(3) = 4 + 6 = 10.$$

Nótese que, de acuerdo con los convenios establecidos, la multiplicación indicada se ha efectuado antes que la suma.

Si las operaciones se realizasen en el orden natural en que aparecen (de izquierda a derecha), tendríamos

$$4 + 2 \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18$$

resultado distinto del anterior. *Por esto es importante realizar siempre las operaciones en el orden convenido de antemano.*

Si se quisiera expresar que la suma de a y b ha de efectuarse antes que la multiplicación por c , la expresión algebraica se escribiría

$$(a + b)c.$$

2. Hallar el valor numérico de

$$3x^2y + 2z^3$$

para $x = -2$, $y = 3$, $z = -2$.

Sustituyendo valores se obtiene, sucesivamente:

$$3(-2)^2 \cdot 3 + 2(-2)^3 = 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2(-8) = 36 - 16 = 20.$$

3. Hallar el valor numérico de

$$x^3 + 5x^2 + 8x - 9$$

para $x = -3$.

Se tiene

$$(-3)^3 + 5(-3)^2 + 8(-3) - 9 = -27 + 45 - 24 - 9 = -15.$$

4. Hallar el valor numérico de

$$\frac{a^2 - b^2}{c^2}$$

para $a = 4$, $b = -2$, $c = 2$.

Puesto que la raya de quebrado se usa en el Álgebra como equivalente al signo de división : (ver § 16-2), la expresión algebraica anterior debe entenderse como equivalente de

$$(a^2 - b^2) : c^2.$$

Por tanto, procederemos a evaluarla de la manera siguiente:

$$\frac{4^2 - (-2)^2}{2^2} = \frac{16 - 4}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

esto es, efectuaremos primero completamente el numerador o dividiendo antes de proceder a la división por 4.

5. Hallar el valor numérico de

$$\frac{(x+y)^3 + (x-y)^2(x+y+z) + (x-y+z)^2}{(2x+3y+z)^2}$$

para $x = 1$, $y = 2$, $z = -3$.

Sustituyendo valores se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{(1+2)^3 + (1-2)^2(1+2-3) + (1-2-3)^2}{(2+6-3)^2} = \\ & = \frac{27 + 1 \cdot 0 + 16}{25} = \frac{43}{25}. \end{aligned}$$

6. Hallar el valor numérico de

$$4x^0 + 3y^2z^{-3}$$

para $x = \frac{1}{2}$, $y = 4$, $z = -2$.

Se tiene

$$\begin{aligned} & 4\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 3(4)^2(-2)^{-3} = 4 + 3 \times 16 \times \frac{1}{(-2)^3} \\ & = 4 + 3 \times 16 \times \frac{1}{-8} = 4 - 6 = -2. \end{aligned}$$

38. Valor numérico de las fórmulas.

La aplicación de una fórmula a un caso práctico requiere la determinación del valor numérico de la expresión algebraica que compone la fórmula.

Usualmente los valores numéricos de las letras que figuran en una fórmula, excepto uno de ellos, son obtenidos experimentalmente por medio de mediciones apropiadas.

Así, por ejemplo, para hallar el área de un rectángulo se hallan las medidas de su base (b) y de su altura (h), y se sustituyen los valores encontrados en la fórmula $A = bh$.

Si en un caso se obtuvo

$$b = 5,2 \text{ m} \quad \text{y} \quad h = 3,4 \text{ m}$$

el área valdrá

$$A = 5,2 \times 3,4 = 17,68 \text{ m}^2$$

La unidad en que se expresa el resultado depende de las unidades con que se hayan obtenido los datos.

Otros ejemplos.

1. Hallar el volumen de una pirámide cuya base tiene un área de 20 m^2 y cuya altura mide 15 m .

En la fórmula 35-8, a saber:

$$V = \frac{1}{3} Bh$$

tenemos $B = 20$, $h = 15$, luego:

$$V = \frac{1}{3} \times 20 \times 15 = 100 \text{ m}^3.$$

2. Hallar el espacio recorrido por un cuerpo que ha estado cayendo en el vacío durante 10 segundos en un lugar donde la aceleración de la gravedad vale $9,80 \text{ m/seg}^2$.

Sustituyendo valores en la fórmula 35-13 tendremos:

$$e = \frac{1}{2} \times 9,80 \times 10^2 = 490 \text{ m}.$$

Es preciso que las unidades en que se expresan los datos sean concordantes. En caso contrario será necesario hacer un cambio de unidad previo. Por ejemplo, si la base de un rectángulo mide 3 m y la altura 50 cm , antes de aplicar la fórmula para hallar el área será necesario expresar la base en centímetros o bien la altura en metros.

39. Expresiones algebraicas equivalentes. Ecuaciones.

Dos expresiones algebraicas son *equivalentes* cuando toman los mismos valores numéricos, cualesquiera sean los valores numéricos atribuidos a las letras que en ellas figuren.

Ejemplo. La expresión algebraica

$$a(b + c)$$

es equivalente a la expresión

$$ab + ac$$

en virtud de la ley distributiva de la multiplicación.

Así, si $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, la primera expresión toma el valor

$$2(3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14$$

y la segunda

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$$

que es el mismo valor numérico obtenido anteriormente; y lo mismo ocurre cualquiera que sea el sistema de valores dados a las letras a , b , c .

Un polinomio y el obtenido de él por reducción de términos semejantes son equivalentes, pues la reducción de términos semejantes es una mera aplicación de la propiedad distributiva, como vimos en el parágrafo 28.

Ejemplo. El polinomio

$$2x + 3y + 4x + 2y$$

es equivalente al binomio

$$6x + 5y$$

obtenido por reducción de los términos semejantes del primero.

Comprobación. Para $x = -1$, $y = 2$ el primer polinomio vale

$$-2 + 6 - 4 + 4 = 4$$

y el segundo

$$-6 + 10 = 4.$$

Cuando dos expresiones algebraicas son equivalentes esto se expresa intercalando el signo $=$ entre ambas.

Ejemplos.

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$2x + 3y + 4x + 2y = 6x + 5y.$$

Más adelante veremos que el signo $=$ también se usa aun cuando las expresiones algebraicas tomen igual valor, únicamente para algunos valores particulares de las letras. En este caso la igualdad se llama *ecuación*.

Ejemplo. En la ecuación

$$x^2 = 4x - 3$$

el primer miembro toma el mismo valor que el segundo únicamente para $x = 1$ y para $x = 3$.

Comprobación.

$$\text{Para } x = 1 : 1 = 4 - 3$$

$$\text{Para } x = 3 : 9 = 12 - 3$$

$$\text{Para } x = 2 : 4 \neq 8 - 3$$

$$\text{Para } x = 5 : 25 \neq 20 - 3$$

etc.

Otro ejemplo. En la ecuación

$$2x - 3 = x + 2$$

el primer miembro toma el mismo valor que el segundo únicamente para $x = 5$.

Comprobación.

$$\text{Para } x = 5 : 10 - 3 = 5 + 2$$

$$\text{Para } x = 3 : 6 - 3 \neq 3 + 2$$

$$\text{Para } x = 2 : 4 - 3 \neq 2 + 2$$

etc.

EJERCICIO 19.

I. Decir si las expresiones algebraicas siguientes son enteras o fraccionarias:

$$1^\circ) -3x^2yz^2.$$

$$2^\circ) xy + yz + zx.$$

$$3^\circ) 4xy^2z^{-1}.$$

$$4^\circ) \frac{ac + bd}{mn}.$$

$$5^\circ) x^3 - 5x^2 + 6x + 8.$$

$$6^\circ) x^2 + 3x - 8 + x^{-1} + 3x^{-2}.$$

$$7^\circ) \frac{1}{x} + 3 + x^2.$$

$$8^\circ) y^{-2}.$$

$$9^\circ) z^{-3} + z^3.$$

$$10^\circ) (x^2 + yz)(y^2 + xz).$$

II. Dar una fórmula que exprese que:

1º) El área de un rombo se obtiene tomando la mitad del producto de sus diagonales*.

* Usaremos este modo de expresión, que es el que se emplea corrientemente, en vez de "mitad del producto de las medidas de sus diagonales". Es decir, sobrentenderemos siempre que se trata de las representaciones numéricas o de medidas de las magnitudes de que se habla y no de las magnitudes mismas.

2º) El área de un triángulo equilátero se obtiene multiplicando por $\sqrt{3}/4$ el cuadrado de su lado.

3º) El área de un trapecio se obtiene multiplicando la semisuma de las bases por su altura.

4º) El volumen de un prisma se obtiene multiplicando el área de su base por la altura del prisma.

5º) El área lateral de un cilindro se obtiene multiplicando la longitud de la circunferencia de la base por la altura del cilindro.

6º) El área lateral de un cono se obtiene multiplicando π por el radio de la base y por la generatriz del cono.

7º) El área total de un cono se obtiene multiplicando π por el radio de la base y por la suma de dicho radio y de la generatriz del cono.

8º) El área de una corona se obtiene multiplicando π por la diferencia entre los cuadrados de los radios de las circunferencias que limitan la corona.

9º) La energía cinética de un cuerpo es igual a la mitad del producto de su masa por el cuadrado de su velocidad.

10º) La intensidad de una corriente se obtiene dividiendo la fuerza electromotriz por la resistencia del circuito (ley de Ohm).

III. Hallar el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes para los valores de las letras que se indican:

1º) $x^2 + yz$ para $x = 1, y = 2, z = 3$.

2º) $x^2 - y^2 + z^2$ para $x = 2, y = -3, z = -1$.

3º) $\frac{xy + z}{xy - z}$ para $x = 3, y = 2, z = 1$.

4º) $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$ para $a = 0, b = 2, c = -1, d = -2$.

5º) $(a + b)(c + d) - a^2$ para $a = 1, b = -2, c = 3, d = -4$.

6º) $x^2 - 2xy + y^2$ para $x = -3, y = -1$.

7º) $x^3 + x^2y - y^3$ para $x = 1, y = -2$.

8º) $x^5 - 2x^3 + x + 4$ para $x = 2$.

9º) $x^3 + 3x^2 - 5x + 8$ para $x = \frac{1}{2}$.

10º) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$ para $a = 4, b = 3, c = 2$.

11º) $(4a + 3b)(4a - 3b) - 16a^2b^2$ para $a = 1, b = -1$.

12º) $(a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)$

para $a = 1, b = 2, c = 3$.

13º) $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}$ para $x = 1, y = -2, z = 3$

- 14º) $7x^2y^{-3} - 2x^0y^2$ para $x = -3$, $y = 2$.
- 15º) $2a^2b^m - 3a^nb^2$ para $a = -2$, $b = 3$, $m = 2$, $n = 3$.
- 16º) $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$ para $x = 0$, $y = -1$, $z = 1$.
- 17º) $(x-y) + (y-z)^2 - (y+z)^3$ para $x = 1$, $y = -2$, $z = 0$.
- 18º) $\frac{2a^2 - b^2 + c^2}{c} + \frac{3a - b}{b}$ para $a = b = c = 2$.
- 19º) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ para $x = -1$, $y = -2$, $z = 3$.
- 20º) $\frac{ab + cd}{ab - cd} + a^x - x^a$ para $a = 2$, $b = -1$, $c = -2$, $d = 0,2$, $x = -2$.

IV. En las fórmulas siguientes, determinar el valor del primer miembro para los valores indicados de las letras que contienen:

- 1º) $i = \frac{crt}{100}$ para $c = 2.400 \$$, $r = 5\%$, $t = 3$ años.
- 2º) $A = \frac{1}{2}bh$ para $b = 10,5$ m, $h = 6$ m.
- 3º) $A = \pi r^2$ para $\pi = \frac{22}{7}$, $r = 3,5$ cm.
- 4º) $V = abc$ para $a = 2$ m, $b = 8$ dm, $c = 20$ cm.
- 5º) $V = \pi r^2 h$ para $\pi = 3,14$, $r = 8$ cm, $h = 5$ cm.
- 6º) $e = vt$ para $v = 20$ m/seg, $t = 2$ min.
- 7º) $e = \frac{1}{2}gt^2$ para $g = 10/\text{seg}^2$, $t = 4$ seg.
- 8º) $A = \pi r(r + g)$ para $\pi = 3,14$, $r = 4$ cm, $g = 6$ cm.
- 9º) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ para $\pi = 3,1416$, $r = 10$ cm.
- 10º) $I = \frac{E}{R}$, para $E = 200$ voltios, $R = 0,5$ ohmios (I resultará expresada en amperios).

EJERCICIO 20. (REPASO).

- 1º) En los ejemplos siguientes señalar los que sean monomios:

a) $7b$ b) -5 c) $a + 1$ d) $\frac{5x}{y}$

- 2º) En los ejemplos siguientes señalar los que sean binomios:

a) $a - bc$ b) $3 + 2$ c) xy d) $x + \frac{1}{x}$

3º) En los ejemplos siguientes señalar los trinomios:

- a) xyz b) $xy + z$ c) $x - y + z$ d) $x + x^{-1} + x^{-2}$

4º) Indicar cuáles son los términos de los polinomios siguientes:

a) $-2x^3 + 5x^2 - 3x - 4$

b) $3x^2y - 4x^2y^2 + 5xy^2 - y^4$

5º) Decir si el primer término es semejante al segundo en cada uno de los pares siguientes:

a) $-3x$, $-3y$

b) $4a$, $2a^2$

c) $5xy^2$, $-5xy^2$

d) -8 , $+3$

e) $4xyz$, $4xyt$

f) $6x^2y^2z^3$, $2x^2y^2z^3$

g) $3x^m y^n$, $4x^m y^n$.

6º) Efectuar la reducción de términos semejantes en los polinomios siguientes:

a) $-a + 2 - 5a + 2a - 3 + 8a - 4 - a + 5a$

b) $3b - 6a + 8b - a - b - 2b - 3c + 2a + c$

c) $9x^2 - 5x - x^2 + 8 - 3x^2 - 4x - 2 + x^2 + x$

d) $x^3 - x^2 + 1 - 2x + x^2 - 3x - 8x^3 + x^2$

e) $x - y + 3z + x^2 - y^2 + 2x - 8z + 3y^2 + z^2$

f) $x^2y - 5xy^2 + 6x^2 - 7xy + 6x^2y + 8xy - y^2 - x^2$

g) $a^2bc - ab^2c - abc^2 + 3ab^2c + 2a^2bc - 5abc^2 + 6abc$

h) $a^2 + b^2 - ab + a^{-1}b^3 + 3ab + a^3b^{-1} - 2a^2 - b^2 - a^{-1}b^3$

i) $z^5 - 2z^3 + z + z^{-1} + 4z^3 - 2z^{-1} - z + z^5 - 2z^3$

j) $5x^2y^n - 3xy^{n+1} + 4x^2y^n + 6x^0y^{n-2} + 4xy^{n+1}$

7º) Dar los grados de los monomios siguientes:

a) $3a$, b) -2 , c) $4x^2y^5$, d) $-2x^3y^{-2}$, e) $3x^4y^2z^5/u^3$.

8º) Dar los grados de los polinomios siguientes:

a) $3 - 2x + x^2$

b) $4x^2 - 5x + 6 + x^3$

c) $x^3y + xy^3 - x^4 + y^4 + xy$

d) $5a^2 + a^{-2} + 3a - 8$

e) $x^{-3} - x^{-2} + 2x^{-1} + 6$

9º) En los ejemplos siguientes señalar los polinomios que son homogéneos:

a) $x + 2y$

b) $3x - 2y + z + 8$

c) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

d) $x^2y + xy^2 + x^2y^2$

10º) Ordenar los siguientes polinomios en potencias ascendentes de x :

a) $-x^2 + 3x + 8 - 2x^3$

b) $x^2 + x^{-1} + 5 + x - x^3$

c) $ax^2 + a^2x + x^3 + a^3$

d) $x^2 + x^{-2} + x + x^{-1} + 8$

11º) Ordenar los siguientes polinomios en potencias descendentes de x :

- a) $4x - 2x^2 + x^3 - 3$ b) $x^2 + 2x^{-1} - x + 3 + x^3$
 c) $-bx^2 - b^3 + x^3$ d) $x - x^{-1} + x^{-2} + x^2 + 1$
 e) $x^n + 2x^{n+2} - 3x^{n-1} + 4x^{n+1} + x^{n-2}$ (n : número natural)

12º) En los siguientes ejemplos decir cuáles expresiones algebraicas son enteras y cuáles son fraccionarias:

- a) $6xy^{-2}z^3$ b) $3x + 4yz$
 c) $\frac{3x + 2y}{x - y}$ d) $x^2 + x + 1 + x^{-1}$

V. Dar una fórmula que exprese que:

1º) En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

2º) En un triángulo rectángulo el producto de los catetos es igual al producto de la hipotenusa por la altura relativa a la hipotenusa.

3º) La suma de los cuadrados de los lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales.

4º) El volumen de un octaedro regular se obtiene multiplicando $\frac{1}{3}\sqrt{2}$ por el cubo de la arista del octaedro.

VI. Hallar el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes para los valores de las letras que se indican:

1º) $x^3 - 2x^2 + 5x - 8$ para $x = -2$

2º) $\frac{a^2 - 3a + 4}{b^2 - 5b + 1}$ para $a = 1, b = 2$

3º) $(a + x)(b - x) - abx^2$ para $a = -1, b = 2, x = -3$

4º) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ para $x = 2, y = -1$

5º) $3a(b + c) + 2b(a + c) - 3c(a + b)$ para $a = b = -1, c = -2$

6º) $\frac{x + y}{z} + \frac{y + z}{x} + \frac{z + x}{y} - \frac{1}{9}xyz$ para $x = 2, y = 3, z = -4$

7º) $4a^2b^{-2} - 3a^{-2}b^3$ para $a = 3, b = 6$

8º) $2x^2y^2 + 3x^0y^{-1} + 4x^{-2}y^0$ para $x = 2, y = 3$

9º) $\frac{ab - cd + ac}{ab + cd - bd}$ para $a = \frac{1}{2}, b = 4, c = -1, d = -2$

10º) $(a + b + c)^3 + (a - b + c)^2 - (a + b - c)(a - b - c)$
 para $a = -1, b = -2, c = -3$.

TEST 3.

1º) Indicar el coeficiente de x en los monomios siguientes:

- a) $-4x$, b) $3ax$, c) $2axy^2$

2º) Indicar el exponente de x en los siguientes:

- a) $3x^2y$, b) $4xyz^2$, c) $-3abx^{-2}$

3º) Entre los monomios siguientes señalar aquél o aquéllos que sean semejantes a $6x^2$:

- a) $6y^2$, b) $-6y^2$, c) $-6x^2$, d) $8x^2$, e) x^2y

4º) En los ejemplos siguientes indicar los monomios que son de tercer grado:

- a) $3xyz$ b) $\frac{2x^2y}{z}$ c) $4x^3y^3$ d) $-2x^3y^{-3}$ e) $5x^{-2}y^5$

5º) Reducir términos semejantes en los polinomios siguientes:

- a) $2x - 5x^2 + 8 + x^3 - 3x + 2x^2 - 2x^3 - 3 + 4x^3 - 6x$

- b) $x^2y - xy^2 + x^2y^2 + 3xy^2 + 2x^2y + x^2y^2 - 2xy^2 - 3x^2y - x^2y^2$

6º) Ordenar el polinomio

$$-x^3y + x^4 + y^4 - x^2y^2 + xy^3$$

- a) en potencias descendentes de x

- b) en potencias ascendentes de x

7º) Mediante la fórmula $V = \pi r^2 h$, calcular en cm^3 el volumen de un cilindro sabiendo que $r = 12 \text{ cm}$, $h = 1 \text{ dm}$ y tomando $\pi = 3,14$.

8º) Hallar el valor numérico de

$$\frac{(a+b)^2 - c^2}{(a-b)^2 + c^2}$$

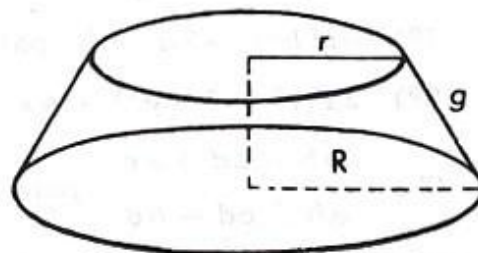
para $a = 2$, $b = -3$, $c = 4$.

9º) Para $x = -2$, $y = 2$ el valor numérico de $-4x^3y^{-2}$ es

- a) -8 b) $+8$ c) -128

(Seleccíonese la respuesta correcta).

10º) Dar una fórmula que exprese que el área lateral de un tronco de cono se obtiene multiplicando π por la generatriz g y por la suma de los radios de las bases.



CAPÍTULO 4.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS ENTERAS.

Trataremos en este capítulo sobre la suma y resta de expresiones algebraicas enteras, dejando para un capítulo posterior el estudio de estas operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias.

40. Suma de monomios.

Sumar varios monomios es formar el polinomio cuyos términos son los monomios dados.

Cuando el polinomio suma tiene términos semejantes se procede, salvo advertencia en contrario, a obtener el polinomio reducido equivalente.

Ejemplos.

1. Sumar los monomios a , $2b$ y $-3c$.

Respuesta: $a + 2b - 3c$.

2. Sumar los monomios $3a$, $-5a$, $4a$ y $6a$.

Respuesta: $3a - 5a + 4a + 6a = 8a$.

En este caso la suma reducida es un monomio porque los términos del polinomio formado son todos semejantes.

3. Sumar los monomios $5a$, -2 , $-3a$, 6 y $-a$.

Respuesta: $5a - 2 - 3a + 6 - a = a + 4$.

4. Sumar los monomios $3x^2y$, $-5xy^2$, $6x^2y$, $2xy^2$, $3xy^2$ y $-2x^2y$.

Respuesta: $3x^2y - 5xy^2 + 6x^2y + 2xy^2 + 3xy^2 - 2x^2y = 7x^2y$.

En virtud de las propiedades de las operaciones con números relativos y de lo dicho en § 39 resulta que el polinomio suma reducido toma un valor numérico igual a la suma de los valores numéricos de los monomios dados, cualesquiera que sean los valores numéricos atribuidos a las letras que en ellos figuren.

Esta propiedad puede utilizarse para comprobar la operación realizada. Así, en el ejemplo 4, los monomios dados toman para $x = 1$, $y = 2$ los valores numéricos siguientes:

Monomios	Valor numérico para $x = 1$, $y = 2$
$3x^2y$	6
$- 5xy^2$	$- 20$
$6x^2y$	12
$2xy^2$	8
$3xy^2$	12
$- 2x^2y$	$- 4$
	Suma: $+ 14$
Resultado:	
$7x^2y$	$7 \cdot 1^2 \cdot 2 = + 14$

Observación. Si el valor numérico del resultado no es igual a la suma de los valores numéricos de los datos ha habido algún error en la operación.

Si el valor numérico del resultado es igual a la suma de los valores numéricos de los datos la operación puede estar bien hecha, pero no es posible asegurar su corrección, pues puede haberse cometido en la comprobación errores que se compensen. Repitiendo la comprobación con otros valores de las letras puede aumentarse el grado de confianza que ofrece el resultado.

41. Suma de polinomios.

Sumar varios polinomios es formar un nuevo polinomio cuyos términos sean todos y cada uno de los términos de los polinomios dados.

Si los polinomios dados contienen términos semejantes es costumbre dar como resultado al polinomio reducido equivalente al obtenido según la definición anterior.

Ejemplos.

1. Sumar los polinomios $2a - 3b + c$ y $x + y - 2z$.

Respuesta: $2a - 3b + c + x + y - 2z$.

2. Sumar los polinomios $4a - 5b - 2c$ y $-2a + 3b + c$.

Respuesta: $4a - 5b - 2c - 2a + 3b + c = 2a - 2b - c$.

3. Sumar los polinomios $x^3 - 5x^2 + 2x - 6$, $2x^3 + 3x^2 - 4x + 3$ y $x^2 - 2x + 1$.

Respuesta: $x^3 - 5x^2 + 2x - 6 + 2x^3 + 3x^2 - 4x + 3 + x^2 - 2x + 1 = 3x^3 - x^2 - 4x - 2$.

Cuando los polinomios dados contienen términos semejantes es mejor disponerlos uno debajo de otro de modo que los términos semejantes queden en columna. Así, en el caso anterior, tendríamos:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 5x^2 + 2x - 6 \\
 2x^3 + 3x^2 - 4x + 3 \\
 x^2 - 2x + 1 \\
 \hline
 3x^3 - x^2 - 4x - 2
 \end{array}$$

Cuando los coeficientes son sencillos, la suma algebraica de los que aparecen en la misma columna se hace mentalmente. En caso contrario, se hace aparte la suma algebraica de los coeficientes.

4. Sumar los polinomios $x^3 - 4x^2y + 6xy^2 + 8y^3$, $-3x^3 + 2x^2y - 2xy^2 - 5y^3$, $x^3 + 5x^2y + xy^2 + y^3$, $4x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - 2y^3$.

Adoptando la disposición anterior tendremos:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 4x^2y + 6xy^2 + 8y^3 \\
 -3x^3 + 2x^2y - 2xy^2 - 5y^3 \\
 x^3 + 5x^2y + xy^2 + y^3 \\
 4x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - 2y^3 \\
 \hline
 \end{array}$$

Respuesta: $3x^3 + 8xy^2 + 2y^3$

Para valores numéricos cualesquiera de las letras que figuran en los polinomios, el polinomio suma toma un valor numérico igual a la suma de los valores numéricos de los polinomios dados. Esta propiedad puede servir para comprobar la operación realizada*.

Así, por ejemplo, si en 3 hacemos $x = 2$ resulta:

Polinomios dados	Valor numérico para $x = 2$
$x^3 - 5x^2 + 2x - 6$	$- 14$
$2x^3 + 3x^2 - 4x + 3$	$+ 23$
$x^2 - 2x + 1$	$+ 1$
	Suma: $+ 10$
Polinomio suma	
$3x^3 - x^2 - 4x - 2$	$+ 10$

EJERCICIO 21.

I. Sumar los monomios siguientes:

- 1º) $3a, 2b, -5c$
- 2º) $x, -y, 2z, -3u$
- 3º) $-3a, 2b, a, b$
- 4º) $2x, 2y, -2z, x, z$
- 5º) $3x^2, y, -2x^2, 3y$
- 6º) $5xy, -2, -3xy, +4$
- 7º) $a^2b, -ab^2, 2ab^2, -3a^2b$
- 8º) $2a^2, -5a^2, b, 3b^2, 2b$
- 9º) $x, -2y, -3x, -5x, 6y$
- 10º) $3a, -2xy, -2a, +4xy$
- 11º) $x^2, -2y^2, 3xy, -3x^2, -xy, y^2, 4x^2, 5y^2$
- 12º) $a, -2b, +3c, b, -2d, -3a, 4b, -2c, -5a, d, 2c$
- 13º) $x^2, -y^2, -z^2, 2y^2, 2x^2, 2z^2, -3y^2, -4x^2, 5z^2$
- 14º) $x^3, -4x^2y, -2x^3, y^3, 3xy^2, x^2y, x^3, 2y^3$
- 15º) $a^2bc, ab^2c, abc^2, -2a^2bc, 2abc^2, -3ab^2c$

II. Sumar los polinomios siguientes:

- 1º) $a - b + c, a^2 + b^2 + c^2, ab + 2$
- 2º) $2a + 3b - c, -3a + 2b + c, a - 2b - 2$
- 3º) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 2, x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 6x + 4$
- 4º) $3 - 5x + x^2, 4 + x + x^2 + x^3, -3 + x + x^3$

* Otra forma de comprobación consistiría en realizar la operación en un orden distinto, esto es, haciendo uso de la propiedad conmutativa.

$$5^{\circ}) a^2 - 2ax + x^2, 3a^2 + ax - 2x^2, -a^2 + 3ax + 4x^2$$

$$6^{\circ}) y^3 - 2y^2 + 3y + 1, 2y^3 - 3y^2 - 4y - 2, y^2 + y + 5, 4y^3 + y^2 - 2y - 6$$

$$7^{\circ}) 3x^2 + x + 1 + 2x^{-1} + x^{-2}, -x^2 + 4x - 2 - 3x^{-1} + 2x^{-2}$$

$$8^{\circ}) x^3 + 1, x^2 - 1, x^4 + x - 2, x^3 - 2x, 2x^4 - 3$$

$$9^{\circ}) x^{n+2} + 3x^{n+1} + 2x^n - x^{n-1}, 2x^{n+2} - x^{n+1} - 4x^n + x^{n-1}$$

$$10^{\circ}) a^{2n} - 3a^n b^n + b^{2n}, -a^{2n} + 2a^n b^n + 2b^{2n}, 3a^{2n} + a^n b^n + 3b^{2n}.$$

$$11^{\circ}) \begin{array}{r} a - 2b + 3c + d \\ - a + 2b + c - 2d \\ \hline 3a + b + c + d \end{array}$$

$$12^{\circ}) \begin{array}{r} x^2 - 5xy + y^2 \\ - 2x^2 + xy - 2y^2 \\ \hline 3x^2 + 2xy + 4y^2 \\ - x^2 - xy + 3y^2 \end{array}$$

$$13^{\circ}) \begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \\ - x^3 + 4x^2 - 4x + 6 \\ \hline 3x^3 - x^2 + 6x - 5 \\ x^3 + 2x^2 - 4x + 2 \end{array}$$

$$14^{\circ}) \begin{array}{r} a^3 - b^3 + c^3 - 2d^3 \\ - a^3 - b^3 + c^3 + d^3 \\ \hline a^3 + 2b^3 - c^3 - d^3 \\ a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \\ - a^3 - c^3 \end{array}$$

$$15^{\circ}) \begin{array}{r} 8a^5 b^2 - 12a^4 b^4 + 6a^2 b^4 \\ - 6a^5 b^2 + 7a^4 b^4 - 4a^2 b^4 - 2a^3 b^3 \\ \hline 3a^5 b^2 - 6a^4 b^4 - 3a^2 b^4 + 7a^3 b^3 \end{array}$$

$$16^{\circ}) \begin{array}{r} 1,5x^3 - 2,3x^2 + 4,1x - 8,2 \\ - 0,5x^3 + 3,6x^2 - 3,4x + 1,3 \\ \hline - 2,5x^3 + 1,2x^2 + 3,1x - 4,6 \\ 3,0x^3 - 2,1x^2 + 4,6x - 7,1 \end{array}$$

$$17^{\circ}) \begin{array}{r} \frac{1}{2}a^3 - \frac{3}{4}a^2b + \frac{1}{4}ab^2 - b^3 \\ \frac{3}{2}a^3 - \frac{1}{4}a^2b + \frac{1}{2}ab^2 + \frac{3}{4}b^3 \\ \hline -\frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{2}a^2b - \frac{3}{2}ab^2 + \frac{1}{4}b^3 \end{array}$$

$$18^{\circ}) \begin{array}{r} x^2 - 1,5x + 2 - 3x^{-1} + 4x^{-2} \\ \frac{1}{2}x^2 + 2,3x + 3 - 2x^{-1} + x^{-2} \\ \hline -\frac{3}{2}x^2 - 1,2x - 1 + 4x^{-1} - 5x^{-2} + 2x^{-3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 19^\circ) \quad a^n - 2a^{n-1}b + 4a^{n-2}b^2 + 3b^n \\
 - 2a^n + 4a^{n-1}b - 5a^{n-2}b^2 + 4b^n \\
 \hline
 - a^n - 3a^{n-1}b + 2a^{n-2}b^2 - 2b^n
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 20^\circ) \quad x^p - 2x^p y^q + y^q + z^m \\
 3x^p - 4x^p y^q - 2y^q + 3z^m \\
 - 2x^p + 5x^p y^q - 3y^q + 2z^m \\
 \hline
 - x^p - 2x^p y^q + 4y^q - 3z^m
 \end{array}$$

42. Resta de monomios.

Restar de un monomio otro es hallar un monomio o un binomio que sumado con el segundo monomio dé el primero.

El resultado de la operación se llama *diferencia* de los monomios dados. La operación misma se denomina *resta* o *sustracción* de monomios.

Para hallar la diferencia entre dos monomios basta aplicar la siguiente regla, análoga a la dada en § 13-2 para hallar la diferencia de dos números relativos.

REGLA. *Para restar un monomio de otro monomio se le cambia el signo al monomio que ha de ser restado (sustraendo) y se suma algebraicamente al otro monomio (minuendo).*

Ejemplos.

1. De $9a$ restar $6a$.

Respuesta: $9a - 6a = 3a$.

Comprobación: $3a + 6a = 9a$.

2. De $7a$ restar $-4a$.

Respuesta: $7a + 4a = 11a$.

Comprobación: $11a - 4a = 7a$.

3. De $-5x^2$ restar $3x^2$.

Respuesta: $-5x^2 - 3x^2 = -8x^2$.

Comprobación: $-8x^2 + 3x^2 = -5x^2$.

4. De $4a$ restar $2b$.

Respuesta: $4a - 2b$.

Comprobación: $4a - 2b + 2b = 4a$.

Como se ve en los ejemplos anteriores, cuando los monomios que han de restarse son semejantes la diferencia es un monomio, pero cuando no son semejantes, la diferencia es un binomio.

La mejor comprobación de la diferencia es la que hemos empleado en los ejemplos anteriores. Según la propia definición, la diferencia ha de ser tal que sumada con el sustraendo se obtenga el minuendo.

Para valores cualesquiera de las letras, la diferencia de dos monomios toma un valor numérico que es la diferencia de los valores numéricos de estos monomios. Esta propiedad puede ser utilizada también como un método de comprobación.

43. Resta de polinomios.

Restar de un polinomio otro es hallar un tercer polinomio que sumado con el segundo polinomio dé el primero.

El resultado de la operación recibe el nombre de *diferencia* de los polinomios dados. Y a esta operación se llama *resta* o *sustracción* de polinomios. El polinomio que se resta se llama *sustraendo*, y el polinomio del cual se resta, *minuendo*.

Se dice que a un polinomio se le *cambia el signo* cuando esta operación se realiza en cada uno de sus términos. Se obtiene así un nuevo polinomio que sumado con el anterior se reduce a cero.

Ejemplos. El polinomio

$$a - b + c - d$$

cambiando de signo es

$$-a + b - c + d.$$

La suma reducida de ambos polinomios es 0.

Análogamente, el polinomio

$$-2x^3 + 5x^2 + 3x - 2$$

cambiando de signo es el nuevo polinomio

$$2x^3 - 5x^2 - 3x + 2.$$

Para hallar la diferencia de dos polinomios dados basta aplicar la siguiente

REGLA. Para restar un polinomio de otro se cambia el signo del polinomio que ha de ser restado y el resultado se suma algebraicamente al otro polinomio.

Es fácil ver que se obtiene así la diferencia buscada, pues sumándola con el sustraendo se reducen los términos de éste, quedando solamente los del minuendo (véase el ejemplo 1 que sigue).

Ejemplos.

1. De $a + b - c$ restar $x - y + z$.

El sustraendo cambiado de signo es $-x + y - z$ y sumando este polinomio con el minuendo se obtiene

$$a + b - c - x + y - z$$

que es la diferencia pedida. En efecto, sumando este último polinomio con el sustraendo resulta

$$a + b - c - x + y - z + x - y + z = a + b - c$$

que es el minuendo.

2. De $2x^3 - 5x^2 - 3x + 4$ restar $x^3 - 2x^2 + x - 3$.

El sustraendo cambiado de signo es

$$-x^3 + 2x^2 - x + 3,$$

y sumando este polinomio con el minuendo se obtiene

$$2x^3 - 5x^2 - 3x + 4 - x^3 + 2x^2 - x + 3 = x^3 - 3x^2 - 4x + 7.$$

Comprobación:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 7 + x^3 - 2x^2 + x - 3 = 2x^3 - 5x^2 - 3x + 4.$$

Cuando los polinomios dados contienen términos semejantes, como los del ejemplo anterior, es mejor disponerlos uno debajo del otro de modo que los términos semejantes se correspondan. Se procede entonces a cambiar de signo (mentalmente) a los términos del sustraendo y a sumarlos algebraicamente con los del minuendo. Esta última operación debe hacerse también mentalmente si los coeficientes son pequeños.

Así, en el caso anterior se tiene:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 - 3x + 4 \\ x^3 - 2x^2 + x - 3 \\ \hline \end{array}$$

Diferencia: $x^3 - 3x^2 - 4x + 7$

Hay quienes prefieren expresar materialmente el cambio de signo de los términos del sustraendo escribiendo cada nuevo signo debajo del antiguo, en la siguiente forma:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 - 3x + 4 \\ x^3 - 2x^2 + x - 3 \\ - \quad + \quad - \quad + \\ \hline x^3 - 3x^2 - 4x + 7 \end{array}$$

3. De $x^2y + 2xy^2 - y^3$ restar $-2x^3 + 3x^2y - 4xy^2 + y^3$.

Se tiene:

$$\begin{array}{r} x^2y + 2xy^2 - y^3 \\ - 2x^3 + 3x^2y - 4xy^2 + y^3 \\ \hline \end{array}$$

Diferencia: $+2x^3 - 2x^2y + 6xy^2 - 2y^3$

4. De $x^2 + 1$ restar $x^4 - x^3 + x^2 - x + 2$.

Se tiene:

$$\begin{array}{r} x^2 + 1 \\ x^4 - x^3 + x^2 - x + 2 \\ \hline \end{array}$$

Diferencia: $-x^4 + x^3 \quad + x - 1$

Comprobación. Para comprobar la operación recuérdese siempre que, según la definición de sustracción, se ha de tener:

$$\text{diferencia} + \text{sustraendo} = \text{minuendo}.$$

Así, en el último ejemplo, se verifica:

Diferencia: $-x^4 + x^3 \quad + x - 1$

Sustraendo: $x^4 - x^3 + x^2 - x + 2$

Minuendo: $x^2 + 1$

EJERCICIO 22.

I. De:

1º) $7a$ restar $4a$

2º) $3a$ restar $6a$

3º) $-5a$ restar $2a$

4º) $4a$ restar $-3a$

5º) $-4a$ restar $-5a$

6º) $-2a$ restar $-8a$

7º) $2x$ restar $3y$

8º) $-3x$ restar $-4y$

9º) $-5x^2$ restar $4x^2$

10º) $3ab^2$ restar $-2ab^2$

Restar:

11º) $-2b$ de $6b$

12º) $4b$ de $-3b$

13º) $-4c^2$ de $-5c^2$

14º) $-3a$ de $2b$

15º) $8x$ de $-6y$

16º) $-5z^3$ de $-3z^3$

17º) $-xy$ de xy

18º) $3xyz$ de $-2xyz$

19º) $-x^2y$ de xy^2

20º) $4x^n$ de $6x^n$

De:

21º) $a - b$ de $c - d$

22º) $x + y + z$ de $u - v + w$

23º) $a - b$ de $a + b$

24º) $a + b$ de $a - b$

25º) $a - b + c + d$ restar $a + b + c - d$

26º) $2x - 3y - 2z$ restar $x + 2y + 3z$

27º) $3x^2 - 5x + 4$ restar $x^2 + 2x + 1$

28º) $x^3 - 6x^2 + 2x - 5$ restar $-2x^3 + 3x^2 - 6x - 4$

29º) $x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ restar $x^2 - 4x - 1$

30º) $2x^2 - 3x + 1$ restar $x^3 - x^2 + 3x - 8$

Restar:

31º) $x^4 + x^2 + 2$ de $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

32º) $x^3 + x^2 - x + 1$ de $2x^2 + 3x + 4$

33º) $y^5 - 2y^3 + 4y^2 - 6$ de $y^5 + y^4 + 3y^2 + 4y + 5$

34º) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ de $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

35º) $x^4 + y^4 - 2x^3y + 3xy^3$ de $x^3y - xy^3 + y^4 - x^4$

36º) $5 + 2x + x^3 - x^4$ de $2 - 3x + x^2 + 2x^3 + 4x^4$

37º) $a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b$ de $a^2b + b^2c + c^2a$

38º) $3x^2yz - 5xy^2z + 6xyz^2$ de $xy^2z - 4x^2yz - 3xyz^2$

39º) $x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5$ de $x^5 + 2x^3y^2 + 2xy^4 + y^5$

40º) $2x^{n+2} - 5x^{n+1} + 3x^n + x^{n-1}$ de $3x^{n+2} - 2x^{n+1} - 6x^n + 2x^{n-1}$

II. Dados los polinomios siguientes, de la suma de los tres primeros restar el último:

$$\begin{aligned} &5x^2 - 2xy + y^2 - 3xz + 4yz - z^2 \\ &x^2 + 3xy - y^2 + 2xz - 2yz + 2z^2 \\ &-3x^2 - xy + 3y^2 - 4xz + 3yz + z^2 \\ &2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3xz - 2yz - 2z^2 \end{aligned}$$

III. Dados los polinomios siguientes, de la suma de los dos primeros restar la suma de los dos últimos:

$$\begin{aligned} &3x^4 - 3ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x + a^4 \\ &-2x^4 - ax^3 - 3a^2x^2 + 5a^3x - 2a^4 \\ &-3x^4 + 4ax^3 - 2a^2x^2 - 3a^3x + a^4 \\ &2x^4 - 2ax^3 + 4a^2x^2 + 6a^3x - 3a^4 \end{aligned}$$

IV. Dados los polinomios siguientes, del primero restar la suma de los tres últimos:

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \\ &x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz \\ &x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz - 2yz \\ &-x^2 + y^2 - z^2 - 2xy - 2xz + 2yz \end{aligned}$$

44. Sumas o diferencias indicadas. Uso del paréntesis.

Supresión de paréntesis.

Para indicar que los polinomios $x^2 - 5x + 2$ y $x^2 + 6x - 3$ han de sumarse se usa la notación:

$$[1] \quad (x^2 - 5x + 2) + (x^2 + 6x - 3),$$

y para indicar que los mismos polinomios han de restarse se escribe:

$$[2] \quad (x^2 - 5x + 2) - (x^2 + 6x - 3).$$

Los signos $+$ ó $-$ intercalados entre los paréntesis son, pues, signos operativos que indican la operación que debe realizarse con las expresiones algebraicas incluidas en los paréntesis.

Los paréntesis son *símbolos de agrupación* que indican la expresión completa o grupo total de términos a los cuales debe aplicarse la operación.

Como sabemos, para efectuar la suma indicada en [1] basta formar el polinomio cuyos términos son los de los polinomios dados, de modo que

$$\begin{aligned} [3] \quad (x^2 - 5x + 2) + (x^2 + 6x - 3) &= x^2 - 5x + 2 + x^2 + 6x - 3 = \\ &= 2x^2 + x - 1. \end{aligned}$$

Análogamente, para efectuar la diferencia indicada en [2] basta sumar al minuendo los términos del sustraendo cambiados de signo, de modo que

$$[4] \quad (x^2 - 5x + 2) - (x^2 + 6x - 3) = x^2 - 5x + 2 - x^2 - 6x + 3 = -11x + 5.$$

Cuando se pasa del primer miembro al segundo en las igualdades [3] ó [4] se dice que se *suprimen los paréntesis*. Esta operación de suprimir paréntesis no difiere, pues, en nada absolutamente de las correspondientes operaciones de suma o resta, según el signo que preceda al paréntesis.

De aquí que para suprimir paréntesis precedidos del signo + baste escribir los términos del polinomio incluído en el paréntesis conservando los signos de estos términos; y que para suprimir paréntesis precedidos del signo - baste escribir con signos cambiados los términos del polinomio incluído en el paréntesis. Los paréntesis a los cuales no precede explícitamente signo alguno (como los primeros paréntesis de [1] y [2]) se suprimen libremente, o lo que es igual, como si estuviesen precedidos del signo +.

Resumiremos lo dicho anteriormente sobre supresión de paréntesis en la siguiente

REGLA. *Todo paréntesis al cual precede el signo + (expreso o tácito) puede suprimirse (conjuntamente con dicho signo +), dejando los términos del polinomio incluído en él con sus propios signos.*

Si al paréntesis precede el signo - puede suprimirse (al mismo tiempo que dicho signo -) siempre que se cambie de signo a los términos del polinomio incluído en él.

Más brevemente: *los paréntesis pueden suprimirse sin más que efectuar las operaciones indicadas correspondientes.*

Ejemplos.

$$(a - b) + (c - d + e) = a - b + c - d + e$$

$$(a - b) - (c - d + e) = a - b - c + d - e$$

$$(2x + 3y) - (3x - 2y) = 2x + 3y - 3x + 2y = -x + 5y$$

$$a + (x + y - z) = a + x + y - z$$

$$a - (x + y - z) = a - x - y + z.$$

Los paréntesis también se usan para indicar varias sumas o restas sucesivas.

Ejemplos.

$$\begin{aligned}(a + b - c) + (a - b + c) - (a - b - c) &= \\ &= a + b - c + a - b + c - a + b + c = a + b + c \\ (x - y) - (y - z) + (z - x) - (2x + 2y - 2z) &= \\ &= x - y - y + z + z - x - 2x - 2y + 2z = -2x - 4y + 4z.\end{aligned}$$

EJERCICIO 23.

Efectuar las operaciones indicadas (suprimir paréntesis):

- 1º) $a + (b - c)$
- 2º) $a - (b - c)$
- 3º) $(a - b) + (c - d)$
- 4º) $(a - b) - (c - d)$
- 5º) $(2a - 3b) + (a + b)$
- 6º) $(2a - 3b) - (a + b)$
- 7º) $(x - 3) + (x - 2)$
- 8º) $(2x - 4) - (x - 2)$
- 9º) $(x^2 - 5x + 1) + (3x - 1)$
- 10º) $(x^2 - 5x + 1) - (3x - 1)$
- 11º) $a - (3a + 2b) + (a - b + c)$
- 12º) $(x + y + z) - (x - y - z) + (-x + y - z) - (x - y + z)$
- 13º) $(x^3 - 5x + 2) + (x^2 + x - 1) - (x^3 - x^2 + 1) - (x^3 + x^2 + x + 2)$
- 14º) $y^2 - (x^2 - z^2) + x^2 - (y^2 + z^2) - z^2 + (x^2 - y^2)$
- 15º) $(a - b + c - d) - (a + b - c + d) + (a + b + c - d)$
- 16º) $(3a^2 - 4ax + x^2) - (a^2 - 2ax + x^2) - (a^2 + ax + x^2)$
- 17º) $x^3 - (x^3 + y^3 - z^3) + y^3 + (x^3 - y^3 + z^3) - z^3$
- 18º) $(ab - ac + bc) - (ab + ac + bc) - (-ab + ac - bc)$
- 19º) $(u^2 + uv + v^2) - (v^2 + vw + w^2) + (w^2 - uw + u^2)$
- 20º) $a - (b - c + d + e) + (a - b + c - d) - (d - e + a)$

45. Introducción de paréntesis.

Hay ocasiones en que conviene asociar los términos de un polinomio de modo que éste aparezca como la suma o diferencia de otros polinomios. Esto se consigue mediante el uso de paréntesis, invirtiendo el proceso estudiado en el párrafo precedente.

Ejemplo.

$$a - b + c - d = (a - b) + (c - d)$$

ó

$$a - b + c - d = (a + c) - (b + d).$$

etc.

REGLA. Varios términos de un polinomio pueden ser incluidos en un paréntesis precedido del signo $+$ con tal que se conserve el signo de cada término.

Varios términos de un polinomio pueden ser incluidos en un paréntesis precedido del signo $-$ con tal que se cambie el signo de cada término incluido en el paréntesis.

Esta regla es consecuencia de la dada en § 44.

Otros ejemplos.

$$b^2 - 2bc + c^2 - a^2 = (b^2 - 2bc + c^2) - a^2$$

$$a^2 - b^2 + 2bc - c^2 = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab - 2cd = (a^2 + 2ab + b^2) - (c^2 + 2cd + d^2)$$

$$x - y - z + u - v - w = (x - y) - (z - u) - (v + w).$$

EJERCICIO 24.

1º) Encerrar en un paréntesis precedido del signo $+$ los tres últimos términos de cada una de las expresiones siguientes:

a) $a + b - c + d$

b) $a + x + x^2 - x^3$

c) $x - y + z - u$

d) $y^3 + y^2 + y - 1$

e) $a^2 + b^2 + c^2 - 2cd + d^2$

2º) Encerrar en un paréntesis precedido del signo $-$ los tres últimos términos de cada una de las expresiones siguientes:

a) $a - b - c + d$

b) $4 - x + x^2 - 2x^3$

c) $x^2 - y^2 - 2yz - z^2$

d) $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

e) $m^2 + n^2 + 2pq - p^2 - q^2$

3º) Incluir en un paréntesis precedido del signo $+$ los términos de los polinomios siguientes que contengan a o b y en otro paréntesis precedido del signo $-$ los demás términos:

a) $ax + ay - cx - cy$

d) $ax - bx + abx - cx + dx - cdx$

b) $a^2 - 2ab - c^2 - d^2 + 2cd + b^2$

e) $a^2 - x^2 - y^2 + b^2 + 2ab - 2xy$

c) $4a^2 + 4ab + b^2 - 9x^2 + 6x - 1$

f) $ax - ay + az - mx + my - mz$

g) $bp - bq + br - bs - cp + cq - cr + cs$

h) $10y - 25 - 6ab + 9b^2 + a^2 - y^2$

i) $12xy - 4y^2 - 9x^2 - 10ab + 25a^2 + b^2$

j) $a^2x - c^2x + b^2y - d^2y + abz - cdz$

46. Otras formas de paréntesis.

Además de los paréntesis ordinarios o redondos () se usan también las siguientes formas de paréntesis:

[] llamados *corchetes*
 y
 { } llamados *llaves*.

En ocasiones se sustituye el paréntesis por un trazo horizontal (llamado *vínculo*) colocado sobre la expresión que se desea incluir en paréntesis.

Ejemplos.

$$a - \overline{b + c} \text{ en vez de } a - (b + c)$$

$$\sqrt{3^2 + 4^2} \text{ en vez de } \sqrt{(3^2 + 4^2)}$$

Los corchetes, llaves y el vínculo se usan especialmente cuando es necesario incluir varios paréntesis unos dentro de otros.

Así, por ejemplo, en vez de

$$a^2 - (b^2 - (c + d)^2)^2$$

se prefiere escribir

$$a^2 - [b^2 - (c + d)^2]^2.$$

He aquí otro ejemplo en donde aparecen varios tipos de paréntesis superpuestos:

$$2x - \{3y - [4x + (x - \overline{y + 2})] - 1\}.$$

47. Supresión de paréntesis superpuestos.

En las expresiones que contienen varios paréntesis superpuestos éstos pueden suprimirse sucesivamente sin más que efectuar las operaciones indicadas, es decir, aplicando las reglas dadas en § 44.

Hay dos maneras de proceder, según se prefiera suprimirlos de fuera adentro (esto es, empezando por el exterior), o de dentro afuera (empezando por el interior). Este último método suele aconsejarse a los principiantes por ser más sencillo y prestarse menos a error.

Ejemplos.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & 2a - \{-4a - [3a - (a - b) + b] - a + b\} \\
 &= 2a - \{-4a - [3a - a + b + b] - a + b\} \\
 &= 2a - \{-4a - 3a + a - b - b - a + b\} \\
 &= 2a + 4a + 3a - a + b + b + a - b \\
 &= 9a + b.
 \end{aligned}$$

O bien:

$$\begin{aligned}
 & 2a - \{-4a - [3a - (a - b) + b] - a + b\} \\
 &= 2a + 4a + [3a - (a - b) + b] + a - b \\
 &= 2a + 4a + 3a - (a - b) + b + a - b \\
 &= 2a + 4a + 3a - a + b + b + a - b \\
 &= 9a + b.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & 5 - x - \{x - [2x - (x - 3 - x)]\} \\
 &= 5 - x - \{x - [2x - (x - 3 + x)]\} \\
 &= 5 - x - \{x - [2x - x + 3 - x]\} \\
 &= 5 - x - \{x - 2x + x - 3 + x\} \\
 &= 5 - x - x + 2x - x + 3 - x \\
 &= 8 - 2x.
 \end{aligned}$$

Si se procede de fuera adentro pueden suprimirse todos los paréntesis y el vínculo sucesivamente, pero en una sola línea; así:

$$\begin{aligned}
 & 5 - x - \{x - [2x - (x - 3 - x)]\} \\
 &= 5 - x - x + 2x - x + 3 - x \\
 &= 8 - 2x.
 \end{aligned}$$

EJERCICIO 25.

Simplificar las expresiones siguientes suprimiendo los paréntesis y reduciendo términos semejantes:

$$1^\circ) \quad a - [b - (a - c)]$$

$$2^\circ) \quad a - b + [(a + 2b) - (2a - b)]$$

$$3^\circ) \quad x - y - [x - (y + z) + z]$$

$$4^\circ) \quad [(2x - 5) - (-3x - 1)] + [(2x - 3) - x]$$

$$5^\circ) \quad 2a - \{3b - [2c - (a + b)]\}$$

$$6^\circ) \quad x - (y + z) - \{z - (y - x) + y - [x + (y - z)]\}$$

$$7^\circ) \quad a - \{2b - [a - (3b - c) + 2c - (a - b - c)]\}$$

- 8º) $a^2 - [a^2 - (a^2 - 2ab + b^2) - b^2 + 2ab]$
 9º) $3xy^2 - (3x^2y - x^3) + [y^3 + (3x^2y - 3xy^2 + y^3) - x^3]$
 10º) $4a - \{3a - b - c + 2c - [3a + (a - b + 2c)]\}$
 11º) $2a - (3b + c) - \{c - (a - b) + b - [a - (b + c)]\}$
 12º) $x + 5 - (2x - 1) - [x - 2 - (3x - 2x - 4)]$
 13º) $4 - x - \{-x - [x - (x - 1 - x)]\}$
 14º) $6 - a - \{2a + [3a - (4a - a - b) - a] + a\}$
 15º) $x - \{x + (a - y) - 2y + [3x - (y - a - 2y) - y] + 2a\}$
 16º) $a^2 - [b^2 - (d^2 - a^2 - b^2)] - [c^2 + (a^2 - c^2 - b^2)]$
 17º) $4 - b - \{5b - [2b - (3b - 2 - b) + 2] - b\}$
 18º) $x + (a - [a - 2 - \{2a + 1\} + 3] - a)$
 19º) $3x + (x - [3x - x - 1] - \{2x - 3\})$
 20º) $8x - (2y - 4x) - \{3y - 2y - x\} - [2y + (4x - 3y)]$

48. Suma y resta de expresiones algebraicas enteras con términos complejos.

Diremos que un monomio o término es *complejo* cuando alguno de sus factores sean sumas algebraicas.

Ejemplos.

$$2(a + b), \quad 3x^2(y - z), \\ -5a(x + y)(x - y), \quad xyz(x + y - z).$$

Para sumar monomios complejos se procede como en § 40, esto es, se forma el polinomio cuyos términos son estos monomios y se reducen los términos semejantes, si los hay.

Ejemplos.

1. Sumar $3(a + b)$ y $2(c + d)$.

Respuesta: $3(a + b) + 2(c + d)$.

2. Sumar $-2(a + b)$, $5(a + b)$ y $-(a + b)$.

Respuesta: $-2(a + b) + 5(a + b) - (a + b) = 2(a + b)$.

3. Sumar $-3ab(x + y)^2$, $-4ab(x + y)^2$ y $5ab(x + y)^2$.

Respuesta: $-3ab(x + y)^2 - 4ab(x + y)^2 + 5ab(x + y)^2 = -2ab(x + y)^2$.

4. Sumar $a(x-y)$, $b(x-y)$ y $c(x-y)$.

$$\begin{aligned}\text{Respuesta: } a(x-y) + b(x-y) + c(x-y) &= \\ &= (a+b+c)(x-y).\end{aligned}$$

En el ejemplo anterior se puede considerar que los términos son semejantes con respecto al factor $(x-y)$ y entonces se procede a **sumar sus coeficientes** a , b , c , aplicando la ley distributiva, de igual modo que se procede en el caso

$$2z + 3z + 5z = (2 + 3 + 5)z = 10z$$

con la sola diferencia que aquí los coeficientes son numéricos.

Para restar monomios complejos se sigue la **misma** regla dada en § 42, es decir, se cambia de signo al monomio que sirve de sustraendo y se suma al minuendo.

Ejemplos.

1. De $3(a+b)$ restar $-2(a-b)$.

$$\text{Respuesta: } 3(a+b) + 2(a-b).$$

2. De $4(x+y)$ restar $-2(x+y)$.

$$\text{Respuesta: } 4(x+y) + 2(x+y) = 6(x+y).$$

3. De $a(x+y)^2$ restar $b(x+y)^2$.

$$\text{Respuesta: } a(x+y)^2 - b(x+y)^2 = (a-b)(x+y)^2.$$

Para sumar o restar polinomios que contengan algunos términos complejos, se **siguen** las mismas reglas generales dadas en § 41 y § 43 y se tiene en cuenta lo dicho anteriormente para la suma o resta de monomios complejos.

Ejemplos.

1. Sumar:

$$\begin{array}{r} 2x^2y - 3a(b+c) + m(p+q) \\ - 4x^2y + 5a(b+c) + n(p+q) \\ \hline - 2x^2y + 2a(b+c) + (m+n)(p+q). \end{array}$$

2. Restar:

$$\begin{array}{r} - 5a^2b^2 + 4x(y-z) + p(u+v) \\ 2a^2b^2 - 2x(y-z) + q(u+v) \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Diferencia: } - 7a^2b^2 + 6x(y-z) + (p-q)(u+v).$$

EJERCICIO 26.

I. Efectuar las sumas siguientes:

$$1^{\circ}) \quad \begin{array}{r} -6(a+x) \\ +4(a+x) \\ \hline \end{array}$$

$$2^{\circ}) \quad \begin{array}{r} 3(a+y) \\ 2(b+y) \\ \hline \end{array}$$

$$3^{\circ}) \quad \begin{array}{r} 5a(b+c) \\ -2a(b+c) \\ \hline \end{array}$$

$$4^{\circ}) \quad \begin{array}{r} -2ab^2(x-y) \\ 6ab^2(x-y) \\ \hline \end{array}$$

$$5^{\circ}) \quad \begin{array}{r} 2n(n+1) \\ 3n(n+1) \\ \hline \end{array}$$

$$6^{\circ}) \quad \begin{array}{r} 2a(x+y^2) \\ 3b(x+y^2) \\ \hline \end{array}$$

$$7^{\circ}) \quad \begin{array}{r} 4x^2 - 6x(y+z) \\ -3x^2 + 4x(y+z) \\ \hline \end{array}$$

$$8^{\circ}) \quad \begin{array}{r} 3a(b+c) - 2d \\ 2a(b+c) - 4d \\ \hline \end{array}$$

$$9^{\circ}) \quad \begin{array}{r} -5xy + 2(x+y+z) - 3a(x-y) \\ +2xy - 5(x+y+z) + 7a(x-y) \\ \hline \end{array}$$

$$10^{\circ}) \quad \begin{array}{r} -4,1x^3 + 3x^2(y-z) + 5x(y+z) \\ -1,2x^3 - 6x^2(y-z) + 2x(y+z) \\ 3,3x^3 + x^2(y-z) - 4x(y+z) \\ \hline \end{array}$$

II. Efectuar las diferencias siguientes:

$$1^{\circ}) \quad \begin{array}{r} 3(x+y) \\ 2(y+z) \\ \hline \end{array}$$

$$2^{\circ}) \quad \begin{array}{r} -3a(x+y) \\ -2a(x+y) \\ \hline \end{array}$$

$$3^{\circ}) \quad \begin{array}{r} 4a^2(x+y)^2 \\ -2a^2(x+y)^2 \\ \hline \end{array}$$

$$4^{\circ}) \quad \begin{array}{r} -5a(b+c-d) \\ 3a(b+c-d) \\ \hline \end{array}$$

$$5^{\circ}) \quad \begin{array}{r} \frac{1}{2}n(n-1) \\ \frac{1}{3}n(n-1) \\ \hline \end{array}$$

$$6^{\circ}) \quad \begin{array}{r} 3m(p+q) \\ -2n(p+q) \\ \hline \end{array}$$

$$7^{\circ}) \quad \begin{array}{r} 3a^2 - 5a(b+c) \\ -2a^2 + 3a(b+c) \\ \hline \end{array}$$

$$8^{\circ}) \quad \begin{array}{r} 4a(b+x) - 2xy \\ -2a(b+x) - 3xy \\ \hline \end{array}$$

$$9^{\circ}) \quad \begin{array}{r} -6x^2 + 3x(y+z) - 2y(x+z) \\ -8x^2 + x(y+z) - 3y(x+z) \\ \hline \end{array}$$

$$10^{\circ}) \quad \begin{array}{r} 3(x+y) - 2a(x-y) + 3b(x+y)(x-y) \\ (x+y) - 6a(x-y) - 2b(x+y)(x-y) \\ \hline \end{array}$$

49. Suma y resta de polinomios por el método de los coeficientes separados.

Cuando se tienen que efectuar operaciones de suma y resta con varios polinomios ordenados resulta ventajoso escribir solamente sus coeficientes, cuidando que queden en columna los correspondientes a términos semejantes y teniendo presente que debe ponerse coeficiente 0 cuando falte algún término del polinomio.

Ejemplo. He aquí la suma de los polinomios $x^4 - 4x^3 + 2x - 4$ y $2x^4 + x^3 - 5x^2 + 3$ por el método usual y por el método de los coeficientes separados.

Método ordinario:

$$\begin{array}{r} x^4 - 4x^3 \qquad \qquad + 2x - 4 \\ 2x^4 + \quad x^3 - 5x^2 \qquad + 3 \\ \hline 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \end{array}$$

Método de coeficientes separados:

$$\begin{array}{r} 1 - 4 + 0 + 2 - 4 \\ 2 + 1 - 5 + 0 + 3 \\ \hline 3 - 3 - 5 + 2 - 1 \end{array}$$

Respuesta: $3x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x - 1$.

A continuación obtenemos la diferencia de los polinomios $5x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ y $2x^3 + 3x - 4$ por ambos métodos.

Método ordinario:

$$\begin{array}{r} 5x^3 - 2x^2 + 4x - 1 \\ 2x^3 \qquad \qquad + 3x - 4 \\ \hline 3x^3 - 2x^2 + \quad x + 3 \end{array}$$

Métodos de coeficientes separados:

$$\begin{array}{r} 5 - 2 + 4 - 1 \\ 2 + 0 + 3 - 4 \\ \hline 3 - 2 + 1 + 3 \end{array}$$

En el método de coeficientes separados puede hacerse la comprobación de la operación realizada hallando las sumas algebraicas de los coeficientes situados en la misma horizontal. Esto equivale a hallar el valor numérico de los polinomios para $x = 1$. Así, por ejemplo, en el caso anterior tendríamos:

Comprobación:

$$\begin{array}{r}
 5 - 2 + 4 - 1 \\
 2 + 0 + 3 - 4 \\
 \hline
 3 - 2 + 1 + 3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 = 6 \\
 = 1 \\
 \hline
 = 5
 \end{array}$$

El método de coeficientes separados es muy útil en la multiplicación y división de polinomios, como veremos en el capítulo próximo.

EJERCICIO 27.

Efectuar las operaciones indicadas siguientes por el método de coeficientes separados:

- 1º) $(x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 5x - 2) + (2x^4 + 3x^2 - x + 4)$
- 2º) $(x^5 - 3x^4 + 2x^2 + x + 7) + (x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2)$
- 3º) $(x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 5x + 3) - (x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 3x - 2)$
- 4º) $(x^3 + 4x^2y - 6xy^2 + 2y^3) + (2x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - y^3)$
- 5º) $(a^4 - 5a^3b + 2a^2b^2 - 5ab^3 + b^4) - (a^4 + 3a^2b^2 - 6ab^3 + 2b^4)$
- 6º) $(x^2 - 6x + 8) + (x^3 - 3x^2 + 1) + (x^4 + 5x^3 + 2x - 4)$
- 7º) $(x^3 - x^2 + x - 1) + (x^4 - x^2 + 4) - (x^3 + 2x^2 + 2x - 6)$
- 8º) $(x^4 + 6x^3 - 2x + 5) - (2x^4 - 3x^3 + 4) + (x^3 + 2x^2 + 4x - 7)$
- 9º) $(y^5 + y^3 + 1) + (y^4 + y^2 + 2) + (y^5 + y^4 + y^2 - 4)$
- 10º) $(z^6 + z^5 + z^2 + 1) + (z^5 - z^4 - z^3 + 2z^2 - 3) + (z^6 - z^3 + z)$.

EJERCICIO 28 (REPASO).

1º) Sumar los monomios siguientes:

- a) $3x, -2y, 4z$
- b) $-4x^2, 2x^2, 5x$
- c) $5a^2b, -3ab^2, -2a^2b, ab^2, ac^2$
- d) $-2x^ny^m, 3x^ny^m, 4x^ny^m$
- e) $-5x(y+z), 2x(y+z), -x(y+z), 4x(y+z)$.

2º) Sumar los polinomios siguientes:

- a) $3a - 2b + 4c, a - b, b + c - 2d$
- b) $x^2 - 5x + 2, x^3 - 4x^2 + 2x - 1, -2x^3 + 3x - 6$
- c) $1,5y^3 - 2,1y + 2; 4,1y^3 - 2y^2 + 4,2y - 3,1; -2,3y^3 + 3y^2 - 4,2$
- d)
$$\begin{array}{r}
 -3x^2y^2 + 4xy^3 - 5y^4 + 2z^n \\
 2x^2y^2 - xy^3 + 6y^4 - 3z^n \\
 -5x^2y^2 + 3xy^3 - 2y^4 + 4z^n \\
 -x^2y^2 - 2xy^3 + 3y^4 - z^n
 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & 3a^2(b+c) - 4a(b+c)^2 + 2(a+b)(c+d) \\ & - 2a^2(b+c) - 2a(b+c)^2 - 3(a+b)(c+d) \\ & a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + 4(a+b)(c+d) \end{aligned}$$

3º) De:

- a) $5ab$ restar $2ab$
- b) $-5x$ restar $-3y$
- c) $-4x^2y^3$ restar $-6x^2y^3$
- d) $3x^ny^m$ restar $5x^ny^m$
- e) $-5x(a+b+y)$ restar $-3x(a+b+y)$
- f) $2a-3b+2c$ restar $-4b+c-2d$
- g) $3a^2-6ax-9x^2$ restar $2a^2-8ax+3x^2$
- h) $2x^3-5x^2y-6xy^2+y^3$ restar $-3x^3-2x^2y+6xy^2-2y^3$
- i) a^4+b^4 restar $a^4-3a^2b^2+2ab^3+b^4$
- j) $3a(x+y)-2a^2(x+y)-5b(x-y)$
 $2a(x+y)-4a^2(x+y)-2b(x-y).$

4º) Efectuar las operaciones indicadas:

- a) $(a-2b+3c-4d) + (a+b-c+3d)$
- b) $(3a+b-2c+d) - (2a+b+c-d)$
- c) $(x^4-2x^3y+6x^2y^2-5y^3) - (-x^4+3x^3y-2x^2y^2-y^3)$
- d) $(x-y+z) + (3x-2y+2z) - (y-z) - (x-y)$
- e) $x^2 - (y^2 - z^2) + z^2 - (y^2 - x^2) - y^2 + (x^2 - z^2)$

5º) En los siguientes polinomios incluir los términos que contienen a en un paréntesis precedido del signo $+$ y los términos que contienen b en un paréntesis precedido del signo $-$:

- a) $-2by + 3ax - 4az + 2bz$
- b) $a^2 - b^2 - a^2c^2 - b^2d^2$
- c) $a^2x - b^2y - a^2z + b^2x - a^2xy$
- d) $2bc + 2bd - 2b^2 - a^2 + a^2c - ad$
- e) $am - bm - bn + an - ap + bp.$

6º) Suprimir paréntesis y reducir términos semejantes:

- a) $10x + [8y - (3x - 2y + 5z) - 2z] - [12y - (3x + 2z)]$
- b) $x^2 - [2a^2 - 3ax - (3a^2 - 6ax + 2x^2)] - 4x^2$
- c) $4a - \{3a - 2 + [-a + 3 + (a - 3a - 2)]\}$
- d) $x - [x - y - \{x - y + z - \overline{x + y - z}\}]$
- e) $2a - [5a + x - \{6a - (3x - y) + 2x\} - 2a].$

7º) Dados los polinomios siguientes, de la suma de los tres primeros restar la suma de los dos últimos. Úse el método de coeficientes separados:

$$\begin{aligned} & x^2 - 2xy + y^2 + 2xz + z^2 - 3x(y + z) \\ & - 3x^2 + 4xy - y^2 + xz + 2z^2 + 6x(y + z) \\ & x^2 - 3xy + 5y^2 - 4xz - z^2 - 2x(y + z) \\ & 2x^2 + xy + y^2 + 2xz + 5z^2 + 4x(y + z) \\ & - 4x^2 + 2xy - 3y^2 - 5xz - 2z^2 + 2x(y + z) \end{aligned}$$

TEST 4.

1º) Sumar los monomios siguientes:

- a) $-3a^2$, $2b^2$, a^2 , b^2 , c^2
b) $-3a(b + c)$, $2a(b + c)$, $4(b - c)$

2º) Sumar los polinomios:

$3xy - x^2 + 2yz - y^2 + 6xz + z^2$ y $2x^2 + 3y^2 + 2yz + z^2 - 3xz - 2xy$
y comprobar el resultado hallando los valores numéricos para
 $x = 1$, $y = -2$, $z = 0$.

3º) La diferencia entre $2x^m$ y $-3x^n$ es

- a) $2x^m - 3x^n$ b) $5x^{m+n}$ c) $2x^m + 3x^n$

(escoger la respuesta correcta).

4º) Restar:

$$\begin{aligned} & 2x^3 - 6x^2y^2 + 7x^n - 6ax(y^2 - z^2) \\ & - x^3 + 2x^2y^2 + 5x^n - 4ax(y^2 - z^2) \end{aligned}$$

5º) Efectuar las operaciones indicadas:

$$(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2 + z^2) - (z^2 - x^2) + (y^2 - z^2) - (x^2 - y^2 - z^2)$$

e indicar cuál de las respuestas siguientes es la correcta:

- a) x^2 b) $2y^2$ c) $-2z^2$ d) z^2 .

6º) Encerrar en un paréntesis precedido del signo $+$ los términos que contienen a ó b y en un paréntesis precedido del signo $-$ los términos que contienen c ó d .

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - 2ab + 2cd.$$

7º) Suprimir paréntesis y reducir términos semejantes:

$$9x - \{-3x - [4 - (6 - \overline{x - 2}) - x] + x + 1\}$$

La respuesta correcta es:

- a) $11x - 5$ b) $13x - 3$ c) $11x - 1$.

89) Dados los polinomios siguientes, de la suma de los dos primeros restar el último:

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 2x - 3 \\ - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 8 \\ x^3 + x^2 - 2x - 8 \end{array}$$

99) Dados los polinomios siguientes, de la suma de los dos primeros restar la suma de los dos últimos. Úse el método de coeficientes separados:

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2y - 5xy^2 + y^3 - z^3 \\ 4x^3 - 2x^2y + 6xy^2 - y^3 - z^3 \\ x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + 2y^3 - z^3 \\ - 2x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + 2z^3 \end{array}$$

109) Dados los polinomios siguientes, del primero restar la suma de los dos últimos:

$$\begin{array}{r} 5n^3 - 2n^2 + 6n - 5 + \frac{1}{2}n(n+1) \\ 2n^3 + 3n^2 - 5n + 4 - \frac{3}{2}n(n+1) \\ - n^3 - 2n^2 + n - 1 + 3n(n+1) . \end{array}$$

CAPÍTULO 5.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS ENTERAS.

50. Multiplicación de monomios.

Multiplicar dos monomios es formar otro monomio cuyos factores sean todos y cada uno de los factores de los monomios dados.

El monomio resultante se llama *producto* de los monomios dados.

Ejemplo. Indicaremos el producto de los monomios $-3a^2b$ y $+2a^3c$ escribiendo

$$(-3a^2b)(+2a^3c).$$

En virtud de la definición dada y de la ley conmutativa de la multiplicación de números relativos*, se puede escribir:

$$(-3)(+2)a^2a^3bc$$

pero sabemos que

$$(-3)(+2) = -6$$

$$a^2a^3 = a^5,$$

luego si aplicamos la ley asociativa, el producto anterior puede expresarse en forma reducida así:

$$-6a^5bc.$$

En lo sucesivo, cuando hablemos de producto de dos monomios entenderemos el producto reducido, en la forma que muestra el ejemplo anterior, siempre que esta reducción sea posible, esto es, siempre que los monomios dados tengan coeficientes numéricos distintos de 1 y algunos factores comunes. Por ejemplo, el pro-

* Recuérdese que las letras no son sino símbolos numéricos.

ducto de los monomios ab y cd es el monomio $abcd$, el cual no es susceptible de reducción alguna.

El ejemplo

$$(-3a^2b)(+2a^3c) = -6a^5bc$$

muestra que para obtener inmediatamente el producto reducido basta tener en cuenta la siguiente

REGLA. *Multiplíquense los coeficientes numéricos de acuerdo con la regla dada en § 14. El resultado será el coeficiente numérico del producto de todos los factores literales que figuren en los monomios dados, elevando cada uno a un exponente igual a la suma de los exponentes de dicho factor en los distintos monomios (de acuerdo con el principio § 15-2 de aditividad de exponente).*

La regla anterior puede desdoblarse en dos:

Regla de los coeficientes. Los coeficientes se multiplican siguiendo la regla, ya conocida, para los números relativos (teniendo en cuenta, en particular, la regla de los signos).

Regla de los exponentes. Los exponentes de las potencias que tienen la misma base se suman, según el principio fundamental

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Otros ejemplos.

$$(-5a^3b^2c)(-2a^2bc^3) = +10a^5b^3c^4$$

$$(+4a^2b^2x^2)(-3bxy^2) = -12a^2b^3x^3y^2$$

$$(abc)(-2xyz) = -2abcxyz$$

$$(-3x^2yz^3)(-4xy^3z^2)(+2axy) = +24ax^4y^5z^5.$$

EJERCICIO 29.

Hallar los productos indicados siguientes:

1º) $(-2x)(+3y)$

2º) $(4xy)(5yz)$

3º) $(+4ab)(-3a^2b)$

4º) $(-1,5x^2y^3z)(+2xz^2)$

5º) $(-8ab)(-2cd)$

6º) $(+3x^3y^2z)(-4a^2xz)$

7º) $(-2ab)(-3bc)(-2cd)$

8º) $(+5x^my^n)(-2x^3y^2)$

9º) $(0,1a^2b^3)(2ab^4)(5a^3bc)$

10º) $(-3x^{m-1})(-x^{m+1})$

11º) $(-xyz)(-x^2z^2)(-y^2z^2)$

12º) $(4a^{3n-1})(-0,5a^{2n+2}).$

51. Producto de un monomio por un polinomio.

Para multiplicar un monomio por un polinomio se aplica la ley distributiva, multiplicando el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

Ejemplos.

$$m(a + b) = ma + mb$$

$$m(a + b - c) = ma + mb - mc$$

$$(-2x)(3x - 2y + z) = -6x^2 + 4xy - 2xz$$

$$(+3a^2b)(a + 2b - 3c) = 3a^3b + 6a^2b^2 - 9a^2bc.$$

A veces la operación se dispone como muestra el ejemplo siguiente:

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 3x - 4 \\ \times -2x \\ \hline -2x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 8x \end{array}$$

El signo $\times$ se usa aquí, como en Aritmética, para indicar multiplicación. Este signo suele omitirse cuando está claro, por lo que precede, que se trata de la operación de multiplicar.

EJERCICIO 30.

Hallar los productos indicados siguientes:

1º) $a(b - c + d)$

2º) $(p + q - r)x$

3º) $(-3x)(x^2 - 5x + 6)$

4º) $x^2(y^2 + z^2 - x^2)$

5º) $(2ab)(a^2 - ab + b^2)$

6º) $x^2(x^2 - x + 2)$

7º) $(-2xy^2)(x^2 - 3xy + 2y^2)$

8º) $(y^2 - yz + z^2)(y^2z^2)$

9º) $\left(-\frac{1}{2}xyz\right)(x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz)$

10º) $(4x^2y^3)(x^4 - 5x^3y + 2x^2y^2 - 6xy^3 + 4y^4)$

11º) $(b^2c^2)(a^4 - b^4 + c^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2)$

12º) $(-c + 3ac^2 - 5a^2b^3c^2)(-4ab^3c)$

13º) $x^n(x^3 - 2x^2 + 5x + 6)$

14º) $(3x^{n-2})(2x^3 - 4x^2 - 6x + 3)$

15º) $(2x^ny^m)(x^{n-1} + x^{n-2}y^{m-2} + y^{m-1})$

52. Producto de un polinomio por otro polinomio.

Para multiplicar dos polinomios se aplica también la ley distributiva. Resulta así un nuevo polinomio cuyos términos son

los productos de cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio.

Ejemplo.

El producto de los polinomios $a + b + c$ y $x + y + z$ se indica así

$$(a + b + c)(x + y + z).$$

Distribuyendo el factor $(a + b + c)$ entre los términos de la suma $x + y + z$ resulta

$$\begin{aligned}(a + b + c)(x + y + z) &= \\ &= (a + b + c)x + (a + b + c)y + (a + b + c)z\end{aligned}$$

y aplicando de nuevo la ley distributiva en cada uno de los productos del segundo miembro, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}(a + b + c)(x + y + z) &= \\ &= ax + bx + cx + ay + by + cy + az + bz + cz.\end{aligned}$$

Puede indicarse la manera de obtener los términos del producto mediante el esquema:

	x	y	z
a	ax	ay	az
b	bx	by	bz
c	cx	cy	cz

En la multiplicación algebraica se conserva la terminología de la multiplicación numérica, y se llaman *multiplicando* y *multiplicador* (o *factores*) los polinomios que se multiplican, y *producto* el polinomio resultante.

En la multiplicación de polinomios ocurre frecuentemente que el producto contiene términos semejantes. Conviene entonces adoptar la disposición que se utiliza en los ejemplos siguientes, con lo cual se consigue que los términos semejantes queden en columna y sea fácil efectuar su reducción.

Ejemplos.

1. Multiplicar $x^2 - 5x + 2$ por $2x - 3$.

Dispondremos la operación así:

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 5x + 2 \\
 2x - 3 \\
 \hline
 2x^3 - 10x^2 + 4x \\
 - 3x^2 + 15x - 6 \\
 \hline
 2x^3 - 13x^2 + 19x - 6
 \end{array}$$

Primero se multiplica $x^2 - 5x + 2$ por $2x$ obteniéndose $2x^3 - 10x^2 + 4x$. Después se multiplica $x^2 - 5x + 2$ por -3 obteniéndose $-3x^2 + 15x - 6$. Este segundo producto se coloca debajo del primero, pero corriéndolo a la derecha con objeto de que queden en columna los términos semejantes. En la última línea aparece el producto ya reducido.

2. Multiplicar $x^2 - xy + y^2$ por $x + y$.

Se tiene, análogamente,

$$\begin{array}{r}
 x^2 - xy + y^2 \\
 x + y \\
 \hline
 x^3 - x^2y + xy^2 \\
 + x^2y - xy^2 + y^3 \\
 \hline
 x^3 + y^3
 \end{array}$$

3. Multiplicar $3 - 2a + a^4 - a^2$ por $a^3 + 1 - 2a$.

Antes de efectuar la multiplicación es conveniente ordenar los polinomios dados en potencias ascendentes o descendentes del factor literal que contengan (o de uno de ellos, si contienen varios factores literales).

Si se ordenan los polinomios anteriores en potencias ascendentes de a , tendremos:

$$\begin{array}{r}
 3 - 2a - a^2 + a^4 \\
 1 - 2a + a^3 \\
 \hline
 3 - 2a - a^2 + a^4 \\
 - 6a + 4a^2 - 2a^3 + a^4 \\
 + 3a^3 - 2a^4 - a^5 + a^7 \\
 \hline
 3 - 8a + 3a^2 - 5a^3 - a^4 - 3a^5 + a^7
 \end{array}$$

Comprobación. Como el producto de polinomios se obtiene por aplicación estricta de las leyes formales de la multiplicación de números relativos, el polinomio-producto ha de tomar un valor numérico igual al producto de los valores numéricos del multiplicando y del multiplicador para valores cualesquiera de las letras que en ellos figuren. Esta propiedad puede utilizarse como comprobación de la operación realizada.

Así, en el ejemplo 2 tendremos, haciendo $x = 2$, $y = -1$:

Multiplicando: $4 + 2 + 1 = 7$

Multiplicador: $2 - 1 = 1$

Producto: $8 - 1 = 7 \quad (= 7 \times 1).$

Si en el ejemplo 3 ponemos $a = -2$ resulta:

Multiplicando: $3 + 4 - 4 + 16 = 19$

Multiplicador: $1 + 4 - 8 = -3$

Producto: $3 + 16 + 12 - 40 - 16 + 96 - 128 = -57$
 $(= 19 \times -3)$

Cabe aquí una observación análoga a la hecha en 40 a propósito de la comprobación de la suma.

Otro modo de comprobar la multiplicación consistiría en efectuarla de nuevo invirtiendo el orden de los factores.

También puede comprobarse mediante la operación inversa (división) que estudiaremos pronto.

Generalmente no se hace comprobación alguna, pues con la práctica continuada se llega a adquirir tal seguridad y confianza que hacen innecesaria toda comprobación. A lo sumo se revisan las operaciones parciales realizadas con objeto de eliminar cualquier equivocación que se haya podido cometer.

EJERCICIO 31.

I. Efectuar las multiplicaciones indicadas siguientes. Comprobar las diez primeras.

1º) $(x + 8)(x + 5)$

2º) $(x - 4)(x - 3)$

3º) $(x - 2)(x + 6)$

4º) $(x + 7)(x - 3)$

5º) $(x + 4)(x - 4)$

6º) $(-x + 3)(x - 1)$

7º) $(x - 5)(2x - 3)$

8º) $(3x - 2)(2x + 3)$

9º) $(2x - 3y)(4x - 2y)$

10º) $(x - y + z)(x + y + z)$

11º) $(3a^2 + 2b^2)(a^2 - b^2)$

12º) $(x^2 - 2x - 2)(x + 3)$

- 13º) $(a - b)(c - d)$ 14º) $(a + b - c)(m - n)$
 15º) $(mn + m + n)(m - n)$ 16º) $(x - 2y + z)(x + y - 2z)$
 17º) $(a^2 - b^2)(a^3 + b^3)$ 18º) $(x^4 + x^2 - 1)(x + 2)$
 19º) $(2,4x^2 - 5x + 3)(0,5x + 1,2)$ 20º) $(x^2 + 2a)(a^2 + 2x)$
 21º) $(x^2 - 3xy - y^2)(x^2 - 3xy + y^2)$ 22º) $(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$
 23º) $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$ 24º) $(x^4 + y^4 - x^2y^2)(x^2 + y^2)$
 25º) $(x^3 - 4xy^2 + 3x^2y - y^3)(3x - 2y)$
 26º) $(x + y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)$
 27º) $(4,2x^2 + 3,6x + 2,5)(0,1x^2 + 0,2x + 1,2)$
 28º) $(x^4 + x^2 - 2x - 7 + 3x^3)(x^2 - 4x + 2)$
 29º) $(6x + 2x^2 + x^3 - 8)(10 + x^2 - 3x)$
 30º) $(2x + x^3 - 3x^2 - 6)(2x + x^2 - 2x^3 - 1)$
 31º) $(x^4 - x^2y^2 + y^4)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$
 32º) $(2x^2 - 3y^2 + 4z^2)(3x^2 + 2y^2 - 5z^2)$
 33º) $(x^2 - xy - xz + y^2 + z^2 - yz)(x + y + z)$
 34º) $(a^2 - ab + b^2 + a + b + 1)(a + b - 1)$
 35º) $(x^2 + 2xy + y^2 + z^2 - xz - yz)(x + y + z)$
 36º) $(1 + 3x + x^2)(2 - x^3 + 4x^2 - 6x)$
 37º) $(a^n - 3a^{n-1} + 2a^{n-2} + a^{n-3})(a + 2)$
 38º) $(x^{2n+3} + x^{2n+2} - 3x^{2n+1} - 6x^{2n})(x^2 - 5x + 3)$
 39º) $(x^{3n} - x^{2n} + x^n - 1)(x^n + 1)$
 40º) $(a^{2p} - a^pb^q + b^{2q})(a^{2p} + a^pb^q + b^{2q})$
 41º) $\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x - 1}$ 42º) $\frac{x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4}{x + y}$
 43º) $\frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 1}{2 + 2x - x^3}$ 44º) $\frac{-6x^4 - x - 2x^2 + x^5 + 8x^3}{x^2 - 3 + 3x}$
 45º) $\frac{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4}{a - b}$ 46º) $\frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{x^2 + 2xy + y^2}$
 47º) $\frac{6x^4 - 3x^2y^2 - 11xy^3 - 4y^4}{x^3 - 2x^2y + xy^2 - y^3}$

II. Dados $A = x^2 - 4x + 2$, $B = x^2 + x - 3$, $C = x^2 + 2x - 1$, hallar:

- 1º) a) AB b) AC c) BC
 2º) a) A^2 b) B^2 c) C^2
 3º) ABC.

53. Multiplicación de polinomios por el método de los coeficientes separados.

Se puede obtener el producto de dos polinomios *ordenados* escribiendo solamente sus coeficientes. Se opera con ellos de la misma manera que por el método usual. Es muy importante en este método escribir 0 cuando algún término intermedio del polinomio tenga este coeficiente y no se halle expresado.

Generalmente no se aplica el método sino a los polinomios con una sola letra o a los polinomios homogéneos con dos letras.

Ejemplos.

1. Hallar el producto de los polinomios $x^2 - 5x + 3$ y $2x - 1$.

Método ordinario:

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 5x + 3 \\
 2x - 1 \\
 \hline
 2x^3 - 10x^2 + 6x \\
 - \quad x^2 + 5x - 3 \\
 \hline
 2x^3 - 11x^2 + 11x - 3
 \end{array}$$

Método de coeficientes separados:

$$\begin{array}{r}
 1 - 5 + 3 \\
 2 - 1 \\
 \hline
 2 - 10 + 6 \\
 - 1 + 5 - 3 \\
 \hline
 2 - 11 + 11 - 3
 \end{array}$$

Comprobación:

$$\begin{array}{r}
 = -1 \\
 = 1 \\
 \hline
 -1 \\
 = -1
 \end{array}$$

Respuesta: $2x^3 - 11x^2 + 11x - 3$.

A la derecha se ha hecho la comprobación de la operación hallando las sumas algebraicas de los coeficientes del multiplicando, multiplicador y producto. El producto de las dos primeras sumas deberá ser igual a la última. Lo anterior equivale a determinar los valores numéricos de los datos y del resultado para $x = 1$.

2. Hallar el producto de los polinomios $x^3 - 2x + 2$ y $x^2 + 3$.

Por el método de coeficientes separados se dispone la operación así:

$$\begin{array}{r}
 1 + 0 - 2 + 2 \\
 1 + 0 + 3 \\
 \hline
 1 + 0 - 2 + 2 \\
 \quad + 3 + 0 - 6 + 6 \\
 \hline
 1 + 0 + 1 + 2 - 6 + 6 \\
 \hline
 = 1 \\
 = 4 \\
 = 4
 \end{array}$$

Respuesta: $x^5 + x^3 + 2x^2 - 6x + 6$.

Es innecesario efectuar los productos por el coeficiente cero que aparece en el multiplicador, pero su presencia avisa que hay que mover dos lugares a la derecha los productos por 3 de los coeficientes del multiplicando.

3. Hallar el producto de los polinomios $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ y $x^2 + 2xy + y^2$.

Se tiene:

$$\begin{array}{r}
 1 - 3 + 3 - 1 \\
 1 + 2 + 1 \\
 \hline
 1 - 3 + 3 - 1 \\
 \quad + 2 - 6 + 6 - 2 \\
 \quad \quad + 1 - 3 + 3 - 1 \\
 \hline
 1 - 1 - 2 + 2 + 1 - 1 \\
 \hline
 = 0 \\
 = 4 \\
 = 0
 \end{array}$$

Respuesta: $x^5 - x^4y - 2x^3y^2 + 2x^2y^3 + xy^4 - y^5$.

Puesto que los datos son polinomios homogéneos de 2º y 3º grados, el resultado es un polinomio homogéneo de grado 5.

EJERCICIO 32.

Efectuar las multiplicaciones siguientes por el método de coeficientes separados:

1º) $(2x - 5)(3x + 2)$

2º) $(x^2 - 4x + 2)(x - 3)$

3º) $(x^2 + 3x - 6)(x^2 - x + 1)$

4º) $(x^3 + 2 - 3x + x^2)(x - 2)$

5º) $(x^3 + x + 4)(x^2 + 2)$

$$6^{\circ}) (y^2 + y^4 + y^6)(y^2 - 1)$$

$$7^{\circ}) (x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)(x + y)$$

$$8^{\circ}) (x^4 - 2x^3y + 4x^2y^2 - 8xy^3 + 16y^4)(x + 2y)$$

$$9^{\circ}) (4a^2 + ab - 2b^2)(3a^2 - 2ab + b^2)$$

$$10^{\circ}) (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a^2 + 2ab + b^2).$$

54. División de un monomio por otro.

Dividir un monomio por otro es encontrar un tercero cuyo producto por el segundo sea el primero.

En la división algebraica se usa la misma terminología y notación que en la división numérica (§ 16).

Ejemplo.

La división de $15x^3y^2$ por $-3x^2$ se indica así

$$(15x^3y^2) : (-3x^2), (15x^3y^2) : (-3x^2), \text{ o bien, } \frac{15x^3y^2}{-3x^2}.$$

En el Álgebra se prefiere generalmente la última notación.

El monomio que se divide se llama *dividendo* ($15x^3y^2$ en el ejemplo anterior). El monomio por el cual se divide se llama *divisor* ($-3x^2$). El monomio resultante se denomina *cociente*.

En el ejemplo que estamos considerando el cociente es $-5xy^2$. En efecto,

$$(-5xy^2)(-3x^2) = 15x^3y^2.$$

Por tanto, escribiremos

$$\frac{15x^3y^2}{-3x^2} = -5xy^2.$$

Para obtener el cociente basta aplicar la siguiente

REGLA. *Divídanse los coeficientes numéricos de acuerdo con la regla dada en § 16. El resultado obtenido será el coeficiente numérico del cociente. Cada factor literal del dividendo o del divisor lo será también del cociente pero con un exponente igual a la diferencia entre los exponentes con que figura en el dividendo y en el divisor (de acuerdo con lo establecido en § 16-4). Cuando un fac-*

tor figure en el dividendo pero no en el divisor (o viceversa) puede suponerse que tiene en éste (o en aquél) exponente cero.

La regla anterior puede desdoblarse en dos:

Regla de los coeficientes: Los coeficientes se dividen siguiendo la regla ya conocida para los números relativos (teniendo en cuenta, en particular, la regla de los signos).

Regla de los exponentes: Los exponentes de las potencias que tienen la misma base se restan, según el principio fundamental

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

y se tienen presente los importantes convenios 16-4 y 22:

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Aplicando la regla enunciada al ejemplo considerado anteriormente tendríamos:

$$\frac{15x^3y^2}{-3x^2} = \frac{15}{-3} x^{3-2}y^{2-0} = -5xy^2.$$

En la práctica el paso intermedio se realiza mentalmente.

Otros ejemplos.

$$\frac{-4a^4b^2c}{-8a^2b^3c} = +\frac{1}{2} a^2b^{-1}$$

$$\frac{-10ax^2y^3}{+2axy^2} = -5xy$$

$$\frac{6x^{2n}y^{n+3}}{2x^n y^{n+1}} = 3x^n y^2.$$

EJERCICIO 33.

Hallar los cocientes indicados siguientes:

1º) $\frac{9x^5}{3x^2}$

2º) $\frac{-4x^4y^2}{2xy^2}$

$$3^{\circ}) \frac{5a^3b^3c^2}{-a^2b^2c}$$

$$4^{\circ}) \frac{-6mnp}{-3mp}$$

$$5^{\circ}) \frac{-2xy^2z^3}{4xyz^2}$$

$$6^{\circ}) \frac{10xy^2}{5x^3y}$$

$$7^{\circ}) \frac{20a^2xy^2}{-4axy^3}$$

$$8^{\circ}) \frac{-x^4y^3z^2}{4x^2yz}$$

$$9^{\circ}) \frac{30x^{10}z^{15}}{20x^8z^{12}}$$

$$10^{\circ}) \frac{6a^2b^n}{-6a^2b^{n-1}}$$

$$11^{\circ}) \frac{4a^{n+1}b^2}{-2a^{n-1}b}$$

$$12^{\circ}) \frac{36x^{2m}y^{n+2}}{-9x^my^{n-1}}$$

55. División de un polinomio por un monomio.

Dividir un polinomio por un monomio es hallar otro polinomio cuyo producto por el monomio sea igual al polinomio dado.

REGLA. Para dividir un polinomio por un monomio basta dividir cada término del polinomio por el monomio y formar el polinomio cuyos términos son los cocientes así hallados.

En general, el polinomio resultante no será un polinomio entero, es decir, sus términos contendrán divisores literales, o bien, factores elevados a exponentes negativos (§ 25).

Así, por ejemplo,

$$\frac{a + b - c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} = am^{-1} + bm^{-1} - cm^{-1}.$$

En efecto,

$$(am^{-1} + bm^{-1} - cm^{-1})m = a + b - c.$$

Otros ejemplos.

$$\frac{x^2 - 3xy}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{3xy}{x} = x - 3y$$

$$\frac{4x^2 - 5x + 2}{2x} = 2x - 2,5 + x^{-1}$$

$$\frac{6m^3n - 3m^2n^2 - 9mn^3}{3mn} = 2m^2 - mn - 3n^2$$

$$\frac{10x^{2n+1} + 15x^{n+2}}{5x^{n-1}} = \frac{10x^{n+1}}{5x^{n-1}} + \frac{15x^{n+2}}{5x^{n-1}} = 2x^{n+2} + 3x^3.$$

Para comprobar los cocientes obtenidos basta multiplicarlos por los correspondientes divisores y se deberán obtener los dividendos respectivos.

Así, en el último ejemplo tenemos:

$$(2x^{n+2} + 3x^3) \cdot 5x^{n-1} = 10x^{2n+1} + 15x^{n+2}.$$

EJERCICIO 34.

Hallar los cocientes indicados siguientes:

$$1^\circ) \frac{a^2 + 2ab}{a}$$

$$2^\circ) \frac{4x^4 - 8x^7}{4x^3}$$

$$3^\circ) \frac{9a^3 - 18a^4}{-6a^2}$$

$$4^\circ) \frac{x^2 + 5x + 2}{x}$$

$$5^\circ) \frac{x^3 - 4x^2 + 6x - 2}{x^2}$$

$$6^\circ) \frac{a^3b^2c - a^2bc^3 + a^3b^3c^3}{a^2b^2c^2}$$

$$7^\circ) \frac{6a^3 - 4a^2b + 10ab^3}{-2a}$$

$$8^\circ) \frac{5x^3y^2 - 2xy^3 + 3xy}{xy}$$

$$9^\circ) \frac{-4m^8n^4 + 8m^6n^6 - 16m^4n^8}{-4m^3n^4}$$

$$10^\circ) \frac{4x^6y^8z^2 - 6x^4y^2z^5 + x^2y^3z^2}{2x^2yz^3}$$

$$11^\circ) \frac{x^{3n+1} - x^{2n+2} + 2x^{n+3}}{x^n}$$

$$12^\circ) \frac{a^{2m+3} + 3a^{2m+2} - 4a^{2m+1}}{a^{m+1}}$$

56. División de un polinomio por otro polinomio.

Consideremos dos polinomios ordenados según las potencias descendentes de una letra x (pudiendo contener o no los polinomios otras letras). Indicaremos esto usando la notación $A(x)$ y $B(x)$ para designar los polinomios, y supondremos que el grado de $A(x)$ es mayor o igual que el de $B(x)$.

Así, por ejemplo, podremos tener

$$A(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 6$$

$$B(x) = x^2 - x + 2$$

o bien,

$$A(x) = x^2 - 6xy + 2y^2$$

$$B(x) = x + 3y$$

de modo que aun cuando los polinomios contengan otras letras, sólo nos fijaremos, por el momento, en la letra ordenatriz x .

De la misma manera que el cociente de un número natural por otro no es en general un número natural, el cociente de un polinomio por otro no es en general un polinomio. Pero de igual modo que la división entera de un número por otro siempre puede efectuarse, quedando un resto menor que el divisor*, se puede hablar siempre de *división entera* de un polinomio por otro, en la forma que se establece en la siguiente

DEFINICIÓN. *Dividir un polinomio $A(x)$ por otro polinomio $B(x)$, cuyo grado sea igual o menor que el de $A(x)$, es hallar otros dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ que cumplan las siguientes condiciones:*

- 1) $A(x) = B(x) \cdot C(x) + R(x)$.
- 2) Grado de $R(x)$ menor que el grado de $B(x)$.

El polinomio $A(x)$ se llama el *dividendo*, $B(x)$ el *divisor*, $C(x)$ el *cociente entero*, y $R(x)$ el *resto*.

Cuando el resto $R(x)$ es cero la división de $A(x)$ por $B(x)$ se dice *exacta*, y se tiene

$$A(x) = B(x) \cdot C(x).$$

Para ver cómo debe procederse para hallar el cociente y el resto de una división de polinomios, consideremos el caso particular siguiente:

* Así, por ejemplo, el cociente entero de 20 por 3 es 6 y el resto es 2, escribiéndose:

$$20 = 3 \times 6 + 2 \quad \text{o} \quad \frac{20}{3} = 6 + \frac{2}{3} = 6 \frac{2}{3}$$

esto es,

$$\text{dividendo} = \text{divisor} \times \text{cociente} + \text{resto}$$

Cuando el resto es cero la división se dice *exacta*.

$$B(x) = 3x^2 - x + 4$$

$$C(x) = 2x - 3$$

$$R(x) = x - 5.$$

Se tendrá entonces:

$$A(x) = (3x^2 - x + 4)(2x - 3) + (x - 5)$$

ó $A(x) = 6x^3 - 11x^2 + 12x - 17$

de modo que

$$6x^3 - 11x^2 + 12x - 17 = (3x^2 - x + 4)(2x - 3) + (x - 5).$$

La igualdad anterior se puede escribir también

$$(6x^3 - 11x^2 + 12x - 17) - (3x^2 - x + 4)(2x - 3) = x - 5$$

lo cual expresa que el resto de la división es la diferencia entre el dividendo y un cierto "múltiplo" del divisor.

Aplicando la propiedad distributiva al producto indicado en el primer miembro tendríamos:

$$[1] \quad (6x^3 - 11x^2 + 12x - 17) - (3x^2 - x + 4)(2x) - (3x^2 - x + 4)(-3) = x - 5$$

Puesto que el primer término del dividendo ($6x^3$) es el producto del primer término del divisor ($3x^2$) por el primer término del cociente ($2x$), éste último se puede hallar dividiendo $6x^3$ por $3x^2$, esto es:

$$\frac{6x^3}{3x^2} = 2x.$$

Si ahora se multiplica $2x$ por el divisor completo $3x^2 - x + 4$ se obtiene

$$6x^3 - 2x^2 + 8x$$

y si esto se resta del dividendo en la forma que indica el primer miembro de [1], se encuentra

$$\begin{array}{r} 6x^3 - 11x^2 + 12x - 17 \\ 6x^3 - 2x^2 + 8x \\ \hline - 9x^2 + 4x - 17 \end{array}$$

que es lo que se llama el primer resto parcial. La igualdad [1] se puede entonces escribir

$$[2] \quad (-9x^2 + 4x - 17) - (3x^2 - x + 4)(-3) = x - 5.$$

Como el resto $x - 5$ es de grado menor que el divisor, los términos en x^2 deben eliminarse, es decir:

$$-9x^2 = (3x^2)(-3).$$

Por tanto, -3 , que es el segundo término del cociente, se puede hallar dividiendo el primer término del resto parcial por el primer término del divisor, a saber:

$$\frac{-9x^2}{3x^2} = -3.$$

Finalmente, la igualdad [2] indica que el resto de la división se obtiene restando del primer resto parcial el producto del divisor completo por -3 .

En la práctica las operaciones descritas se disponen de la manera siguiente:

Dividendo	$6x^3 - 11x^2 + 12x - 17$	$3x^2 - x + 4$	Divisor
	$6x^3 - 2x^2 + 8x$	$2x - 3$	Cociente
1 ^{er} . resto parcial	$\begin{array}{r} -9x^2 + 4x - 17 \\ -9x^2 + 3x - 12 \\ \hline \end{array}$		
Resto	$x - 5$		

Resumiremos el procedimiento explicado en la siguiente

REGLA. Supuestos ordenados el dividendo y el divisor en potencias descendentes de una misma letra, se obtiene el primer término del cociente dividiendo el primer término del dividendo por el primer término del divisor; el primer resto parcial resulta restando del dividendo el producto del divisor por el primer término del cociente; dividiendo ahora el primer término de dicho resto parcial por el primer término del divisor se obtiene el segundo término del cociente, y así sucesivamente, hasta obtener un resto cuyo grado sea menor que el grado del divisor, el cual será el resto de la división. Si este resto último es nulo la división será exacta.

Otros ejemplos.

$$\begin{array}{r}
 1. \quad \begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + x + 4 \\ x^3 - 2x^2 \end{array} \bigg| \begin{array}{r} x - 2 \\ x^2 + 5x + 11 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} 5x^2 + x + 4 \\ 5x^2 - 10x \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} 11x + 4 \\ 11x - 22 \end{array} \\
 \hline
 + 26
 \end{array}$$

En la práctica no suelen escribirse completamente los restos parciales sino que los términos del dividendo van “bajándose” según sea necesario. Así, por ejemplo, en el caso anterior se dispone la operación así:

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 3x^2 + x + 4 \bigg| x - 2 \\
 x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 5x^2 + x \\
 5x^2 - 10x \\
 \hline
 11x + 4 \\
 11x - 22 \\
 \hline
 + 26
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2. \quad \begin{array}{r} 6a^4 - a^3 + 5a^2 + 34a - 14 \\ 6a^4 - 9a^3 + 21a^2 \end{array} \bigg| \begin{array}{r} 2a^2 - 3a + 7 \\ 3a^2 + 4a - 2 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} 8a^3 - 16a^2 + 34a - 14 \\ 8a^3 - 12a^2 + 28a \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} - 4a^2 + 6a - 14 \\ - 4a^2 + 6a - 14 \end{array} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3. \quad \begin{array}{r} x^4 + x^2y^2 \\ x^4 + x^3y + x^2y^2 \end{array} \bigg| \begin{array}{r} x^2 + xy + y^2 \\ x^2 - xy + y^2 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} - x^3y \\ - x^3y - x^2y^2 - xy^3 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} x^2y^2 + xy^3 + y^4 \\ x^2y^2 + xy^3 + y^4 \end{array} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Cuando los polinomios contienen varias letras, el cociente y el resto resultan enteros con respecto a la letra ordenatriz pero no necesariamente con respecto a las otras letras. Además, si se repite la operación eligiendo otra letra para ordenarlos, el cociente y el resto son en general distintos a los obtenidos primeramente, como muestra el ejemplo siguiente.

$$\begin{array}{r}
 4. \quad \begin{array}{r} 2x^4 - 3x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 \\ 2x^4 - 4x^3y + 2x^2y^2 \\ \hline + x^3y - x^2y^2 - xy^3 + y^4 \\ x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 \\ \hline + x^2y^2 - 2xy^3 + y^4 \\ + x^2y^2 - 2xy^3 + y^4 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x^2y - 2xy^2 + y^3 \\ 2x^2y^{-1} + x + y \end{array} \right. \\
 \\
 \begin{array}{r} y^4 - y^3x + y^2x^2 - 3yx^3 + 2x^4 \\ y^4 - 2y^3x + y^2x^2 \\ \hline y^3x - 3yx^3 + 2x^4 \\ y^3x - 2y^2x^2 + yx^3 \\ \hline 2y^2x^2 - 4yx^3 + 2x^4 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} y^3 - 2y^2x + yx^2 \\ y + x \end{array} \right.
 \end{array}$$

Los polinomios utilizados en las dos últimas divisiones son los mismos. En la primera se tomó x como letra ordenatriz resultando el cociente exacto $2x^2y^{-1} + x + y$, que es un polinomio entero con respecto a la letra x pero no con respecto a la letra y . En la segunda se tomó y como letra ordenatriz resultando inexacta la división. El cociente es ahora $y + x$ y el resto es $2y^2x^2 - 4yx^3 + 2x^4$. Nótese que este resto es con respecto a la letra y de grado menor que el divisor.

He aquí, finalmente, un ejemplo en donde intervienen potencias con exponentes literales:

$$\begin{array}{r}
 5. \quad \begin{array}{r} 2x^{3n} - 6x^{2n}y^n + 6x^ny^{2n} - 2y^{3n} \\ 2x^{3n} - 2x^{2n}y^n \\ \hline - 4x^{2n}y^n + 6x^ny^{2n} - 2y^{3n} \\ - 4x^{2n}y^n + 4x^ny^{2n} \\ \hline 2x^ny^{2n} - 2y^{3n} \\ 2x^ny^{2n} - 2y^{3n} \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x^n - y^n \\ 2x^{2n} - 4x^ny^n + 2y^{2n} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Comprobación. La comprobación de la división se efectúa sumando el resto al producto del divisor por el cociente, lo cual deberá ser igual al dividendo, de acuerdo con la propiedad fundamental que sirve de definición. Esto es:

$$\text{divisor} \times \text{cociente} + \text{resto} = \text{dividendo}.$$

Además, debe verificarse si el resto obtenido es de grado menor que el divisor (con respecto a la letra ordenatriz escogida). Así, el ejemplo 1 en la división de la pág. 123 se tiene

$$(x - 2)(x^2 + 5x + 11) + 26 = (x^3 + 3x^2 + x - 22) + 26 = x^3 + 3x^2 + x + 4.$$

Se puede comprobar también la operación dando un valor numérico a la letra o letras que figuren en los polinomios y viendo si los valores numéricos correspondientes verifican la relación

$$\text{divisor} \times \text{cociente} + \text{resto} = \text{dividendo}.$$

Así, si en el ejemplo anterior hacemos $x = 4$ resulta:

$$\text{dividendo} = 64 + 48 + 4 + 4 = 120$$

$$\text{divisor} = 4 - 2 = 2$$

$$\text{cociente} = 16 + 20 + 11 = 47$$

$$\text{resto} = 26 = 26$$

y se tiene

$$2 \times 47 + 26 = 120.$$

EJERCICIO 35.

I. Dividir:

$$1^\circ) x^2 + 9x + 20 \text{ por } x + 5$$

$$2^\circ) x^2 - 7x + 12 \text{ por } x - 3$$

$$3^\circ) x^2 + 6x - 11 \text{ por } x - 2$$

$$4^\circ) a^3 - 2a^2 + 3a - 5 \text{ por } a + 3$$

$$5^\circ) b^3 + 4b^2 + 6 \text{ por } b - 4$$

$$6^\circ) x^4 - 16 \text{ por } x - 2$$

$$7^\circ) x^3 + 1 \text{ por } x + 1$$

$$8^\circ) x^3 + 1 \text{ por } x - 1$$

$$9^\circ) x^5 - 1 \text{ por } x - 1$$

$$10^\circ) x^5 - 1 \text{ por } x + 1$$

$$11^\circ) 7 - 9x + 4x^3 - 8x^2 \text{ por } 2x - 3$$

$$12^\circ) x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 3x - 4 \text{ por } x^2 - x + 2$$

$$13^\circ) x^4 - 12x + 11x^2 - 5x^3 + 6 \text{ por } 3 - 3x + x^2$$

$$14^\circ) 12a^4 - 39a^3 + 10 + 37a + 4a^2 \text{ por } 4a^2 - 5a - 2$$

- 15º) $a^4 + 9a^2 + 81$ por $-a^2 + 3a - 9$
 16º) $a^6 - 2a^3 + 1$ por $a^2 - 2a + 1$
 17º) $5b^3 - 6b^4 + 1$ por $3b^2 - b + 1$
 18º) $y^4 - 2y^2 + y^3 - 6 + 2y$ por $y^2 + 3y + 3$
 19º) $x^5 + 1$ por $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
 20º) $0,63x^3 - 1,49x^2 + 0,61x + 0,33$ por $0,9x - 1,1$
 21º) $0,42y^4 - 0,63y^3 - 0,79y^2 + 0,45y + 0,35$ por $0,6y^2 - 0,9y - 0,7$
 22º) $6x^{3n} + 5x^{2n} - 18x^n + 8$ por $3x^n - 2$
 23º) $4x^{3n} - 6x^{2n} + 12x^n - 7$ por $2x^n + 5$
 24º) $x^{4m} + x^{2m} + 1$ por $x^{2m} + x^m + 1$
 25º) $20a^{4n+6} - 18a^{4n+5} + 23a^{4n+4} - 4a^{4n+3} + a^{4n+2} + 3a^{4n+1}$
 por $4a^{n+2} - 2a^{n+1} + 3a^n$.

II. En las divisiones siguientes usar la x como letra ordenatriz:

- 26º) $x^2 - 2xy + y^2$ por $x - y$
 27º) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ por $x + y$
 28º) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ por $x - y$
 29º) $x^3 - y^3$ por $x + y$
 30º) $x^5 + y^5$ por $x + y$
 31º) $x^3 + y^3$ por $x^2 - xy + y^2$
 32º) $x^6 + y^6$ por $x^2 + y^2$
 33º) $x^4 - x^2z^2 + z^4$ por $x^2 - xz + z^2$
 34º) $4x^4 - 12ax^3 + 31a^2x^2 - 33a^3x + 28a^4$ por $2x^2 - 3ax + 4a^2$
 35º) $10x^5y - 21x^4y^2 - 56xy^5 - 3x^2y^4 - 10x^3y^3$ por $8y^3 - 3xy^2 + 5x^2y$
 36º) $x^8 - 4x^4y^4 + 16y^8$ por $x^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 4xy^3 + 4y^4$
 37º) $x^2 - y^2 - z^2 - 2yz$ por $x + y + z$
 38º) $x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2$ por $x + y + z$
 39º) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ por $x + y + z$
 40º) $2x^2 - 3y^2 - z^2 + xy - xz - 4yz$ por $2x + 3y + z$
 41º) $x^3 + 8y^3 - 125z^3 + 30xyz$ por $x + 2y - 5z$
 42º) $x^3 + y^3 + 8z^3 - 6xyz$ por $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xz - xy - 2yz$
 43º) $x^{2n} - 2x^ny^n + y^{2n}$ por $x^n - y^n$
 44º) $x^{m+n}y^n - 3x^{m+n-1}y^{2n} - 13x^{m+n-2}y^{3n} + 15x^{m+n-3}y^{4n}$ por $x^m + 2x^{m-1}y^n - 3x^{m-2}y^{2n}$
 45º) $x^{5m} + x^{4m}y^n - 3x^{3m}y^{2n} + 14x^{2m}y^{3n} - 4x^my^{4n}$ por $x^{2m} + 3x^my^n - y^{2n}$.

III. En los siguientes ejercicios hacer las divisiones dos veces utilizando primero x como letra ordenatriz y después y :

46º) $4x^2 + 8xy + y^2$ por $2x - y$

47º) $6x^2 - 4xy + y^2$ por $3x + y$

48º) $x^4 + x^2y^2 + 2y^4$ por $x^2y - xy^2 + y^3$

49º) $x^6 - 3x^5y + x^4y^2 + x^2y^4 - 3xy^5 + y^6$ por $x^4y^2 - 3x^3y^3 + x^2y^4$

50º) $x^4 + x^3y - 4x^2y^2 + xy^3 + y^4$ por $x^2 - 2xy + y^2$.

57. División por el método de coeficientes separados.

Puesto que en la operación de dividir los polinomios dividendos y divisor se ordenan previamente, los distintos términos de la operación quedan dispuestos de tal manera que sus posiciones respectivas bastan para indicar las potencias de la letra ordenatriz escogida. Este hecho se utiliza, como en la suma, resta y multiplicación, para abreviar la operación, escribiendo solamente los coeficientes, pero no se debe olvidar el escribir coeficientes 0 cuando falte algún término en los polinomios considerados.

Ejemplos.

1. Dividir $x^3 - 4x^2 + 7x - 5$ por $x - 2$.

Método ordinario:

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 7x - 5 \quad | \quad x - 2 \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline - 2x^2 + 7x \\ - 2x^2 + 7x \\ \hline + 3x - 5 \\ + 3x - 6 \\ \hline + 1 \end{array}$$

Método de coeficientes separados:

$$\begin{array}{r} 1 - 4 + 7 - 5 \quad | \quad 1 - 2 \\ 1 - 2 \\ \hline - 2 + 7 \\ - 2 + 4 \\ \hline + 3 - 5 \\ + 3 - 6 \\ \hline + 1 \end{array} = x^2 - 2x + 3$$

2. Dividir $2x^4 - 5x^3y + 12xy^3 - 9y^4$ por $x^2 - 3xy + 3y^2$.

Tomando la x como letra ordenatriz se tiene, por el método de coeficientes separados:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 2 & -5 & +0 & +12 & -9 & & 1 & -3 & +3 \\
 2 & -6 & +6 & & & & 2 & +1 & -3 \\
 \hline
 & 1 & -6 & +12 & & & & & \\
 & 1 & -3 & +3 & & & & & \\
 & & -3 & +9 & -9 & & & & \\
 & & -3 & +9 & -9 & & & & \\
 \hline
 & & & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Por tanto, el cociente exacto es $2x^2 + xy - 3y^2$.

En el caso en que el divisor es un binomio de primer grado de la forma $x \pm a$, como en el ejemplo 1, la operación puede abreviarse aun más. En primer lugar, es innecesario escribir el primer término en las líneas que se escriben debajo de cada resto parcial y, además, no es conveniente "bajar" sucesivamente los términos del dividendo. A continuación mostramos esto escribiendo a la izquierda el ejemplo 1 en la forma en que se hizo antes y a la derecha el mismo ejemplo en forma abreviada:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & -4 & +7 & -5 & \\
 1 & -2 & & & \\
 \hline
 & -2 & +7 & & \\
 & -2 & +4 & & \\
 \hline
 & & +3 & -5 & \\
 & & +3 & -6 & \\
 \hline
 & & & +1 &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|rrrr}
 1 & -4 & +7 & -5 & \\
 & -2 & & & \\
 \hline
 & & +4 & & \\
 & & +3 & & \\
 \hline
 & & & -6 & \\
 & & & +1 &
 \end{array}$$

Mejor aún es condensar en una sola línea todos los números que se escriben debajo del dividendo, del siguiente modo:

$$\begin{array}{r|rr}
 1 & -4 & +7 & -5 & \\
 & -2 & +4 & -6 & \\
 \hline
 & & -2 & +3 & +1 &
 \end{array}$$

Si en la tercera línea se escribe el primer término del dividendo delante del -2 , resulta innecesario escribir el cociente debajo del divisor, pues sus términos serán los mismos de la tercera línea,

excepto el último, que representa el resto. Por otra parte, es también innecesario escribir el primer término del divisor. Tras estas modificaciones, la operación se escribe del modo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 1 - 4 + 7 - 5 & - 2 \\ - 2 + 4 - 6 & \\ \hline 1 - 2 + 3 + 1 & \end{array}$$

En estas condiciones la operación se efectúa así: se escribe en la tercera línea el primer término del dividendo, el cual se multiplica por el divisor -2 y el producto se coloca en la segunda línea debajo del -4 ; restando los números situados en la segunda columna se obtiene -2 el cual se escribe en la tercera línea y se multiplica por el divisor -2 , obteniéndose $+4$, que se sitúa debajo del 7 y se resta de éste, quedando $+3$ en la tercera línea; multiplicando otra vez por -2 se obtiene -6 que se coloca debajo de -5 y se resta, obteniéndose $+1$ que se escribe en la tercera línea.

Con objeto de convertir las sustracciones de los números de la segunda fila en adiciones (algebraicas), lo cual es algo más cómodo, se cambia de signo el número que representa al divisor. Después de esta última modificación la operación queda en la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} 1 - 4 + 7 - 5 & + 2 \\ + 2 - 4 + 6 & \\ \hline 1 - 2 + 3 + 1 & \end{array}$$

Los números de la tercera línea resultan de sumar los correspondientes de las líneas primera y segunda.

La disposición anterior para efectuar la división de un polinomio por un binomio de primer grado, se llama *división sintética*, o método de Horner o de Ruffini.

Otros ejemplos.

3. Dividir $x^4 - 3x^2 + 2$ por $x - 3$.

Se tiene:

$$\begin{array}{r|l} \text{Coeficientes del dividendo:} & 1 + 0 - 3 + 0 + 2 \\ + 3 \times \text{coeficientes del cociente:} & + 3 + 9 + 18 + 54 \\ \hline \text{Coef. del cociente y resto:} & 1 + 3 + 6 + 18 + 56 \end{array} \quad \begin{array}{l} + 3 \\ \text{Divisor} \end{array}$$

Cociente: $x^3 + 3x^2 + 6x + 18$.

Resto: $+ 56$.

4. Dividir $x^5 + x^4 - 3x - 6$ por $x + 1$.

$$\begin{array}{r} 1 + 1 + 0 + 0 - 3 - 6 \quad | - 1 \\ - 1 + 0 + 0 + 0 + 3 \\ \hline 1 + 0 + 0 + 0 - 3 - 3 \end{array}$$

Cociente: $x^4 - 3$.

Resto: $- 3$.

5. Dividir $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ por $x + 3$.

$$\begin{array}{r} 1 + 6 + 11 + 6 \quad | - 3 \\ - 3 - 9 - 6 \\ \hline 1 + 3 + 2 + 0 \end{array}$$

Cociente: $x^2 + 3x + 2$.

Resto: 0 .

EJERCICIO 36.

I. Efectuar las siguientes divisiones por el método de coeficientes separados:

1º) $2x^2 - 5x + 6$ por $x - 3$

2º) $3x^2 + 4x - 1$ por $x + 2$

3º) $x^3 - 4x^2 - 3x + 8$ por $x - 2$

4º) $x^3 + 2x - 5$ por $x - 4$

5º) $x^4 - 2x^3 - 20x^2 + x + 6$ por $x + 4$

6º) $3x^4 - 25x^2 - 5x + 8$ por $x + 3$

7º) $x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 3x + 7$ por $x^2 - 2x + 1$

8º) $x^4 + x^2 + 6$ por $x^2 + 3x - 2$

9º) $x^3 - 4x^2y + 2xy^2 - 2y^3$ por $x - 2y$

10º) $2x^4 + 5x^3y - 3xy^3 + y^4$ por $x^2 + 2xy - 3y^2$

II. Aplicar el método de división sintética a los ejemplos siguientes:

11º) $x^2 - 8x + 9$ por $x - 1$

12º) $x^2 + 6x + 3$ por $x - 2$

13º) $x^3 - x^2 + x - 1$ por $x + 1$

14º) $2x^3 + 3x^2 - 6$ por $x + 2$

15º) $x^3 + 4x^2 + 2x - 10$ por $x - 3$

16º) $4x^3 + 20x^2 - 64$ por $x + 4$

17º) $x^4 - x^2 + 8$ por $x + 3$

18º) $x^5 - 32$ por $x - 2$

19º) $x^5 + x^3 + 2x - 10$ por $x + 2$

20º) $x^6 - x^4 + x^2 + 3$ por $x - 1$.

58. Cociente completo.

En la división de 20 por 3 se tiene

$$20 = 3 \times 6 + 2$$

o bien

$$\frac{20}{3} = 6 + \frac{2}{3} = 6 \frac{2}{3}$$

y en Aritmética se dice que 6 es el *cociente entero* de la división y que

$$6 + \frac{2}{3} = 6 \frac{2}{3}$$

es el *cociente completo*. El cociente completo se obtiene agregando al cociente entero una fracción cuyo numerador es el resto y cuyo denominador es el divisor.

Nótese que en Aritmética se prescinde a veces del signo + escribiéndose la suma de un entero y un quebrado poniendo éste a continuación de aquél, en forma llamada *número mixto*, como el $6 \frac{2}{3}$ del ejemplo anterior. Esta práctica no se sigue en Álgebra cuando se trata de símbolos literales ya que, según los convenios aceptados, la escritura de un símbolo a continuación de otro indica aquí producto y no suma.

Así, por ejemplo, en Álgebra

$$a \frac{b}{c} \text{ indica } a \cdot \frac{b}{c} \text{ y no } a + \frac{b}{c}.$$

Se llama *cociente completo* de la división de $A(x)$ por $B(x)$ a la expresión

$$[1] \quad \frac{A(x)}{B(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

en donde $C(x)$ es el cociente entero y $R(x)$ el resto de la división de $A(x)$ por $B(x)$. Los cocientes de polinomios de la forma

$$\frac{A(x)}{B(x)} \quad \text{y} \quad \frac{R(x)}{B(x)}$$

que llamaremos también *fracciones algebraicas*, los consideraremos sujetos a la condición fundamental

$$\frac{A(x)}{B(x)} \times B(x) = A(x), \quad \frac{R(x)}{B(x)} \times B(x) = R(x)$$

de modo que el caso de cociente exacto, que se indica con la misma notación

$$\frac{A(x)}{B(x)}$$

queda incluido en el concepto anterior como caso particular.

Las operaciones con fracciones algebraicas, que estudiaremos con más detenimiento en el capítulo 10, cumplen las mismas leyes formales que las operaciones análogas con fracciones numéricas.

Si se multiplican ambos miembros de [1] por $B(x)$ y se aplica la propiedad distributiva, se obtiene

$$[2] \quad A(x) = B(x) \cdot C(x) + R(x)$$

que no es otra cosa que la igualdad utilizada en § 56 para definir el cociente entero y el resto de la división de $A(x)$ por $B(x)$.

La igualdad [1] no es completamente equivalente a la [2] pues esta última es válida para valores numéricos cualesquiera de las letras que figuren en los polinomios, en tanto que en [1] no se puede dar a las letras valores que anulen $B(x)$.

Ejemplos.

1. Puesto que

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 4x^2 - 2x + 5 \quad | \quad x - 3 \\
 \underline{x^3 - 3x^2} \\
 -x^2 - 2x \\
 \underline{-x^2 + 3x} \\
 -5x + 5 \\
 \underline{-5x + 15} \\
 -10
 \end{array}$$

el cociente completo de la división de $x^3 - 4x^2 - 2x + 5$ por $x - 3$ es

$$\frac{x^3 - 4x^2 - 2x + 5}{x - 3} = x^2 - x - 5 + \frac{-10}{x - 3}.$$

1. Puesto que

$$x^3 - y^3 = (x^2 - xy + y^2)(x + y) - 2y^3$$

el cociente completo de la división de $x^3 - y^3$ por $x + y$ es

$$\frac{x^3 - y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2 + \frac{-2y^3}{x + y}.$$

3. Cuando el resto es cero, el cociente completo se reduce al cociente exacto. Así, por ejemplo,

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2.$$

EJERCICIO 37.

Hallar el cociente completo en las divisiones indicadas siguientes:

1º) $(x^2 + x + 2) : (x + 1)$

2º) $(x^3 + x^2 - 4) : (x - 2)$

3º) $(2x^3 - x^2 + x - 6) : (x^2 - x + 1)$

4º) $(x^4 + x^2 + 3x - 4) : (x^2 - 2x + 3)$

5º) $(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) : (x - 1)$

6º) $(x^2 - 2xy + y^2) : (x + y)$

7º) $(x^2 + 4xy + 2y^2) : (x - 2y)$

- 8º) $(x^3 - 3x^2y + xy^2 - y^3) : (x - y)$
 9º) $(x^3 + x^2y - xy^2 + y^3) : (x^2 + y^2)$
 10º) $(a^6 - b^6) : (a^2 - ab + b^2).$

EJERCICIO 38. (REPASO).

I. Efectuar los productos indicados siguientes:

- 1º) $(-2x^2y^3z)(-3xyt)$ 2º) $(+2,5ab^2)(-3a^2bc^3)$
 3º) $(-xy)(-2yz)(-4xz)$ 4º) $(3x^{n-1})(2x^{n+1}y^n)$
 5º) $b^2(a^2 - b^2 + c^2)$ 6º) $(a^2 - 5ab - b^2)(a^2b^3)$
 7º) $a^n(a^2 + 2a + 1)$ 8º) $a^nb^m(a^{n+1} - a^nb^m + b^{m+1})$
 9º) $(x - 2y + 3x)(2x + y - z)$
 10º) $(x^3 - 6x^2y + 4xy^2 - 2y^3)(2x - 3y)$
 11º) $(x^2 - 2 + x^3 - 3x + 2x^4)(3x - x^2 + 2)$
 12º) $(x^{2n+2} - 3x^{2n+1} - 2x^{2n} + x^{2n-1})(x^2 - 2x + 5)$

II. Hallar los productos siguientes por el método de coeficientes separados:

- 1º) $(x^3 - 4x^2 - 3x - 2)(x^2 - 2x + 1)$
 2º) $(x^4 - 2x^2 + 3)(x^2 + x - 2)$
 3º) $(a^4 - a^3 + 2)(a^2 + 3)$
 4º) $(b^4 + b - 2)(b^2 - b + 2)$
 5º) $(3x^2 - 2xy + y^2)(x^2 - 3xy + 2y^2)$
 6º) $(a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2)(a^2 + b^2 - 2ab)$

III. Dados $W = a + b + c$, $X = a - b + c$, $Y = a + b - c$, $Z = -a + b + c$, hallar:

- 1º) $WXYZ$
 2º) $W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2$

IV. Hallar los cocientes indicados siguientes:

- 1º) $\frac{-6x^2y^3z^5}{2xy^2z^3}$ 2º) $\frac{-10a^2b^2c^2}{-5bc^2}$
 3º) $\frac{20x^5y^6z^{10}}{40x^3y^5z^{12}}$ 4º) $\frac{16x^3my^{2n+1}}{-4x^2my^{n-1}}$
 5º) $\frac{3ab - 2a^2}{2a}$ 6º) $\frac{x^5 - x^3 + 2x^2}{x^2}$

$$7^{\circ}) \frac{6x^2y^3 - 9x^3y^2 + 12x^3y^3}{x^2y^2}$$

$$8^{\circ}) \frac{2x^{n+1}y^{2m} - x^{2n}y^{m+1}}{x^ny^m}$$

V. Hallar el cociente entero y el resto en los siguientes:

$$1^{\circ}) (x^3 - 5x^2 + 2x + 6) : (x - 3)$$

$$2^{\circ}) (x^4 + x^2 - 2x^3 + 20 - x) : (x^2 + 2 - 4x)$$

$$3^{\circ}) (0,24y^5 + 0,44y^4 - 0,12y^3 - 0,58y^2 - 0,48y + 0,18) : (0,2y^2 + 0,3y - 0,1)$$

$$4^{\circ}) \left(\frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{9}b^2 + \frac{1}{6}b - \frac{1}{16}\right) : \left(\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b - \frac{1}{4}\right)$$

VI. Hallar el cociente entero y el resto en las divisiones siguientes tomando a como letra ordenatriz:

$$1^{\circ}) (2a^3b + a^4 - 22a^2b^2 - ab^3 - b^4) : (a - 4b)$$

$$2^{\circ}) (a^{n+4} - 6a^{n+3}b^n + 4a^{n+2}b^{2n} + 15a^{n+1}b^{3n} - a^n b^{4n} - a^{n-1}b^{5n}) : (a^2 - 4ab^n - b^{2n})$$

VII. Utilizar el método de división sintética en los ejemplos siguientes:

$$1^{\circ}) (x^3 + 30x^2 + 14x - 8) : (x + 5)$$

$$2^{\circ}) (x^4 - 10x^3 + 100x - 18) : (x - 4)$$

$$3^{\circ}) (x^5 - 40x^3 + 150x - 36) : (x - 6)$$

VIII. En las siguientes divisiones hallar el cociente completo:

$$1^{\circ}) (3x^3 + 6x^2 - x + 5) : (x + 2)$$

$$2^{\circ}) (x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 8) : (x^2 - 4x + 5)$$

$$3^{\circ}) (x^4 - 3x^2y^2 + y^4) : (x - 2y).$$

TEST 5.

I. Multiplicar:

$$1^{\circ}) a) (2x^3y^2)(-4axy^3)$$

$$b) (a^n b^n)(a^n b^n c^n)$$

$$2^{\circ}) a) (x^2y - 3xy^2 - 2y^3)(-2xy^2)$$

$$b) (x^{n-p} + y^{m-p})(x^p y^p)$$

$$3^{\circ}) (x^2 + 2 - 2x + x^3)(2x + x^2 - 3)$$

$$4^{\circ}) (x^4 - 6x^3y + 2x^2y^2 - 6xy^3 + y^4)(2x^2 - xy + 2y^2)$$

5^{\circ}) Hallar los productos siguientes usando el método de coeficientes separados:

$$a) (x + y)(x - y)$$

$$b) (x + y)^2$$

$$c) (x - y)^2$$

$$d) (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

II. Dividir:

1º) a) $(-8xy^2z^4) : (-2xyz^4)$ b) $(a^{2n}b^m c^p) : (a^n b^m c^{p-1})$

2º) a) $(3x^3y^2 - 2x^2y^3 + 4x^3y^3) : (x^2y)$ b) $(y^{n+1} - z^{n+2}) : (y^2z^2)$

3º) $(5x^4 - 4x^5 + x^6 - 9x^2 - 6 + 13x) : (x^2 - 3x + 2)$

III. En la siguiente división sintética expresar el cociente como un polinomio en x , y dar el resto:

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 2 + 0 - 9 + 2 + 1 + 3 \\
 & + 4 + 8 - 2 + 0 + 2 \\
 \hline
 & 2 + 4 - 1 + 0 + 1 + 5
 \end{array}$$

IV. Efectuar la división siguiente por coeficientes separados tomando x como letra ordenatriz:

$$(x^5 + x^3y^2 - x^2y^3 - y^5) : (x^2 + xy + y^2).$$

CAPÍTULO 6.

ECUACIONES ALGEBRAICAS SENCILLAS. PROBLEMAS.

59. Ecuaciones.

Las igualdades de la forma

$$2x + 1 = x + 3$$

$$x^2 = 2 - x$$

$$x + y = 3,$$

que son ciertas solamente para algunos valores de las letras que contienen, se llaman *ecuaciones*.

Así, por ejemplo, la primera de las igualdades escritas arriba solamente es cierta para $x = 2$; la segunda sólo se cumple para $x = 1$ y $x = -2$; y la tercera solamente la satisfacen aquellos números cuya suma algebraica sea 3, v. gr., $x = 1$, $y = 2$; $x = 4$, $y = -1$; $x = -2$, $y = 5$ etc. Hay una infinidad de valores que satisfacen esta tercera ecuación, pero no todo par de valores la satisface; por ejemplo, para $x = 4$, $y = 5$ la igualdad no se cumple.

Resolver una ecuación es determinar los valores de las letras que hacen cierta la igualdad. Estos valores se llaman *soluciones* o *raíces* de la ecuación.

Las letras que intervienen en las ecuaciones reciben el nombre de *incógnitas*. Por lo general las incógnitas se indican mediante las últimas letras del alfabeto (x , y , z , ...).

Ejemplo.

En la ecuación

$$3x - 5 = x + 3$$

la incógnita es x . Esta ecuación tiene la solución o raíz

$$x = 4.$$

Comprobación: $3 \times 4 - 5 = 4 + 3 = 7$.

En una ecuación la expresión que se antepone al signo $=$ se llama el *primer miembro* de la ecuación; la expresión que sigue al signo $=$ se llama el *segundo miembro* de la ecuación.

Así, en el ejemplo anterior, $3x - 5$ es el primer miembro de la ecuación y $x + 3$ es el segundo miembro.

Si ambos miembros de una ecuación son polinomios, se llama *grado de la ecuación* al mayor de los grados de estos polinomios, o al grado común de los mismos en caso de que estos polinomios sean del mismo grado.

Ejemplo.

La ecuación

$$3x + 2 = x - 8$$

es de primer grado; y la ecuación

$$2x + 1 = 2x^2$$

es de segundo grado.

En este capítulo sólo nos ocuparemos de la resolución de ecuaciones sencillas de primer grado y de los problemas que conducen al planteamiento y resolución de ecuaciones de este tipo.

Decimos que la ecuación es sencilla cuando la incógnita está sometida únicamente a las operaciones de suma (algebraica) y multiplicación.

60. Ecuaciones equivalentes. Transposición de términos.

Dos ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen las mismas soluciones.

Ejemplo.

Las ecuaciones

$$3x = 2x + 5$$

y

$$3x - 2x = 5$$

son equivalentes. Ambas tienen la solución $x = 5$.

Las ecuaciones sencillas se resuelven transformándolas en otras equivalentes, de acuerdo con la regla que enunciaremos después.

Las siguientes operaciones permiten transformar una ecuación en otra equivalente:

a) *Suma o resta del mismo número o de la misma expresión algebraica entera a ambos miembros de la ecuación.*

b) *Multiplicación o división de ambos miembros de la ecuación por el mismo número distinto de cero.*

Esto es consecuencia de la ley de uniformidad de las operaciones con números relativos (véase § 18).

La operación (a) permite pasar o *transponer* términos de un miembro a otro de la ecuación siempre que, al propio tiempo, se cambie el signo de los términos que se transponen.

Así, por ejemplo, la ecuación

$$[1] \quad 2x - b = x + a$$

se transforma, sumando b en ambos miembros.

$$[2] \quad 2x - b + b = x + a + b$$

o bien,

$$[3] \quad 2x = x + a + b.$$

En la práctica se pasa de [1] a [3] directamente y se dice que se ha transpuesto el término $-b$ al segundo miembro. Nótese que este término se escribe $+b$ en el segundo miembro, esto es, con signo cambiado.

Ahora podemos tomar [3] y restar x en ambos miembros, obteniendo

$$[4] \quad 2x - x = x + a + b - x$$

o bien,

$$[5] \quad x = a + b$$

después de reducir términos semejantes.

Otro ejemplo.

Si en la ecuación

$$2 + 3x - 4 + x - 2 = 3 - 8 - 2x + 3 + x$$

pasamos los términos numéricos del primer miembro al segundo y los términos que contienen x del segundo miembro al primero, resulta:

$$3x + x + 2x - x = 3 - 8 + 3 - 2 + 4 + 2$$

o bien,

$$5x = 2$$

que es una ecuación equivalente.

La operación (b), a saber, multiplicación o división de ambos miembros de una ecuación por el mismo número diferente de cero, permite pasar un factor (divisor) de un miembro de la ecuación al otro, siempre que se escriba como divisor (factor) en este último.

Así, por ejemplo, si dividimos por 5 ambos miembros de la ecuación

$$[6] \quad 5x = 2$$

se obtiene

$$\frac{5x}{5} = \frac{2}{5}$$

o bien,

$$[7] \quad x = \frac{2}{5}$$

Obsérvese que el factor 5 que figura en el primer miembro de la ecuación [6] aparece como divisor en el segundo miembro de [7].

En la práctica se pasa directamente de la ecuación [6] a la [7].

Otros ejemplos.

$$4x = 12 \text{ es equivalente a } x = \frac{12}{4} \text{ ó } x = 3.$$

$$\frac{1}{3} \cdot x = 5 \text{ es equivalente a } x = 5 \times 3 \text{ ó } x = 15.$$

Cuando la letra que designa la incógnita en una ecuación (x generalmente) queda aislada en un miembro de la ecuación, se dice que se ha *despejado* esta letra.

EJERCICIO 39.

I. En las siguientes ecuaciones transponer términos de modo que en el primer miembro sólo queden términos que contengan la incógnita y en el segundo miembro sólo queden términos numéricos. Dar el resultado en forma simplificada efectuando la reducción de términos semejantes:

$$1^{\circ}) \quad x + 2 = 6$$

$$2^{\circ}) \quad 3x - 1 = 2 + x$$

$$3^{\circ}) \quad 3 = 4 - x$$

$$4^{\circ}) \quad 6x + 2 = 2x + 1$$

$$5^{\circ}) \quad x - 1 = 3x + 3$$

$$6^{\circ}) \quad 2x - 1 = 4 + x - 3$$

$$7^{\circ}) \quad y + 2 + 3y = 2y - 6$$

$$8^{\circ}) \quad 3 + y - 2 = 4 - 2y$$

$$9^{\circ}) \quad 4 - 2z = 6 - 5z + 2$$

$$10^{\circ}) \quad 2 + z - 5 = -z + 3 - 4z.$$

II. En las ecuaciones siguientes despejar la incógnita pasando al otro miembro de la ecuación el factor o divisor que la acompaña:

$$1^{\circ}) \quad 2x = 4$$

$$2^{\circ}) \quad 3x = 9$$

$$3^{\circ}) \quad 5x = -20$$

$$4^{\circ}) \quad 10 = 2x$$

$$5^{\circ}) \quad -4x = 12$$

$$6^{\circ}) \quad -3x = -6$$

$$7^{\circ}) \quad \frac{x}{2} = 3$$

$$8^{\circ}) \quad \frac{x}{4} = -3$$

$$9^{\circ}) \quad \frac{1}{4}y = \frac{1}{2}$$

$$10^{\circ}) \quad 6y = 3.$$

61. Resolución de ecuaciones sencillas.

Para resolver una ecuación sencilla cuyos miembros sean polinomios basta tener en cuenta lo estudiado en el párrafo anterior, aplicando la siguiente

REGLA. 1) Si en el segundo miembro de la ecuación hay términos que contienen la incógnita, transpónganse al primer miembro.

2) Si en el primer miembro hay términos que no contienen la incógnita, transpónganse al segundo miembro.

3) Redúzcanse términos semejantes.

4) Si el coeficiente de la incógnita que resulte es distinto de 1, pásese al segundo miembro. Con esto habrá quedado despejada

la incógnita, y el valor obtenido en el segundo miembro representará la raíz o solución de la ecuación.

Las ecuaciones de primer grado sólo tienen una raíz, excepto cuando se reducen a la forma $0 \cdot x = 0$, en cuyo caso cualquier valor de x la satisface.

Es claro que el método descrito en la regla anterior puede modificarse poniendo en el segundo miembro todos los términos que contengan la incógnita y en el primero todos aquellos términos que no la contengan.

Ejemplos.

1. Sea la ecuación

$$4x - 2 = 2x + 4.$$

Transponiendo términos se obtiene

$$4x - 2x = 4 + 2$$

y reduciendo términos semejantes

$$2x = 6.$$

Despejando x resulta

$$x = \frac{6}{2} \quad \text{ó} \quad x = 3.$$

Comprobación. Para comprobar que 3 es la raíz de la ecuación propuesta basta reemplazar x por 3 en dicha ecuación y verificar que el primer miembro toma el mismo valor numérico que el segundo miembro. Se tiene, en efecto,

$$4 \times 3 - 2 = 2 \times 3 + 4 \\ 10 = 10.$$

2. Sea la ecuación

$$2 - 3x + 3 + x = 10 - 5x + 1.$$

Se obtiene sucesivamente:

$$-3x + x + 5x = 10 + 1 - 2 - 3 \\ 3x = 6 \\ x = 2.$$

Comprobación: $2 - 6 + 3 + 2 = 10 - 10 + 1$

$$6 \qquad 1 = 1$$

Si los miembros de la ecuación a resolver no están ambos en forma polinómica se comienza por reducirlos a esta forma efectuando primero las multiplicaciones que estén indicadas y después las sumas o restas.

Ejemplo.

Consideremos la ecuación

$$2 - 3(x - 1) = 3x - 2(4x - 3).$$

Efectuando las operaciones en el orden prescrito se obtiene

$$2 - (3x - 3) = 3x - (8x - 6)$$

$$2 - 3x + 3 = 3x - 8x + 6.$$

Haciendo ahora la transposición de términos resulta:

$$-3x - 3x + 8x = 6 - 2 - 3$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

EJERCICIO 40.

Resolver las ecuaciones siguientes y comprobar la solución encontrada:

1º) $4x - 2 = 10$

2º) $6x - 3 = x + 17$

3º) $2x + 5 = 3$

4º) $7x = 4x + 6$

5º) $2x = 9 + x$

6º) $6x = 24 - 2x$

7º) $10 = 15 - 5x$

8º) $x - 8 = 4 - x$

9º) $3x - 10 = 18 - x$

10º) $7x - 8 = 3x + 4$

11º) $2 - 3x - 5 = 5 - 8x + x$

12º) $x + 2 = 3 - 2x + 8$

13º) $4 - y + 2y = 6 - 2y + 1$

14º) $2z + 3 = 1 + z + 4$

15º) $0,6x - 0,3 = 1,2 + 0,4x$

16º) $0,26y + 0,21 = -0,04y - 0,06$

18º) $3(x + 6) - 40 = 6(x - 3)$

19º) $2(3x - 2) - 5x = 2(x - 3) + 90$

20º) $4(x - 1) - 5(3 - x) = 14x - 2(5x - 3)$

21º) $12x - 3(x - 2) = 3(x + 4)$

22º) $4x - (x + 6) - (x - 2) = 16 - 2x$

23º) $x^2 + 3x - (x - 2) = 2(x - 1) + (x^2 - x)$

- 24º) $3(x-1) + 5(x-2) - (x-3) = 18$
- 25º) $2(x-3) - 4(x-1) + 3(x-5) = 2x + 20$
- 26º) $10 - 4(x+2) = 32 - 6(3x-2)$
- 27º) $8(x-2) - 5(3-x) + 16 = 15 - 4(3-x)$
- 28º) $(3x-2) - (x+3) - x = 0$
- 29º) $0 = 6x + (11-x) + 2(x-2)$
- 30º) $(2x+3) - (x+4-2x) = 5 - (x+2)$
- 31º) $3x + (-x+1) - (x-5) = 8 - (2x-6+x)$
- 32º) $4x + [-x - (5+x)] = 3$
- 33º) $15 - [-3x + (8x-2)] = 7$
- 34º) $6 + \{3x - [3 + (4x-1)]\} = -2$
- 35º) $x - \{2 + [x - (3x-1)]\} = 2 - x$
- 36º) $-3x - [-6x - (3-x)] = 9 + (x-1)$
- 37º) $6 + (3x-4) = 2x - \{3 + [4x - (3-x)] - x\}$
- 38º) $x^2 - (x-3)(x+2) = 8$
- 39º) $3x^2 - (x-1)(x+5) = 2x^2 + 3$
- 40º) $-(4-x)(x+3) = x^2 - 40$
- 41º) $5x - 3[x - (2x-1)] = -3$
- 42º) $x + 4 - (x-2)(x-1) = 3(3-x) - x^2$
- 43º) $22 - [3x - (2x-1)] = 5x + \{6 - [2x - 7(x-1)]\}$
- 44º) $4(x-5)(x+2) = 11 - 3[x(x+2) + 3] + 7x^2$
- 45º) $(y+2)(y-1) + (-y)^2 = (2y-1)(y+2) - 4$
- 46º) $(z+1)(z+4) + 3(z-2)(z-1) = 4z(z-6)$
- 47º) $x(x+1)(x+2) - (x+1)(x-2)(x+3) = x^2 - 1$
- 48º) $(y-3)(y+5) - 2y(y-1) = (y-3)(y-2) + 6 - 2y^2$
- 49º) $(z+1)(z-3) - (z+2)(z+4) = 3z - [4z - 2(z-1)]$
- 50º) $(2x-3)(3x-2) + (4x-1)(2x-6) = 2x(7x-5) + 70$

62. Traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico.

Pronto estudiaremos algunos problemas que se resuelven mediante una ecuación algebraica sencilla. El planteamiento de la ecuación correspondiente a cada problema requiere el saber expresar en lenguaje algebraico las condiciones que en lenguaje ordinario contiene el enunciado del problema. Como esta es la parte que mayor dificultad suele ofrecer al principiante, la tratamos previamente, ilustrándola con los siguientes

Ejemplos.

El número n aumentado en 3 se representa por $n + 3$.

El número n disminuido en 3 se representa por $n - 3$.

El duplo de un número (desconocido) se representa por $2x$.

El triple de un número se representa por $3x$.

La mitad de un número se representa por $\frac{x}{2}$ ó $\frac{1}{2}x$.

El cuadrado de un número se representa por x^2 .

El duplo de un número aumentado en 5 se representa por $2x + 5$.

Si una persona tiene t años, su edad hace 4 años se representa por $t - 4$. Su edad dentro de 5 años se representa por $t + 5$.

Dos números enteros consecutivos se representan por n y $n + 1$.

Un número par se representa por $2p$ (ya que todo número par es el duplo de otro número entero).

Un número impar se representa por $2p + 1$ (ya que todo número impar es el siguiente de un número par).

Si las cifras de las decenas de un número natural es d y la cifra de las unidades es u , el número se representa por $10d + u$. (Obsérvese que, por ejemplo, $54 = 10 \times 5 + 4$). Esto es lo que se llama la representación polinómica de un número escrito en el sistema de base 10.

Si una persona camina x km por hora, el número de kilómetros que camina en t horas (a un paso uniforme) se representa por xt .

El número de centavos y de céntimos que hay en x pesos y en y pesetas respectivamente se representa por $100x + 20y$.

EJERCICIO 41.

Escribir utilizando el simbolismo algebraico:

1º) Un número aumentado en 5.

2º) Un número disminuido en 8.

3º) El cuadrado de un número aumentado en 2.

4º) El cubo de un número.

- 5º) El quíntuplo de un número.
- 6º) El triple de un número disminuido en 4.
- 7º) El 5 % de un número.
- 8º) Tres números consecutivos.
- 9º) Dos números pares consecutivos.
- 10º) El cuadrado de un número menos el número.
- 11º) En una división el divisor es d , el cociente q y el resto r . Representar el dividendo.
- 12º) En una división el dividendo es D , el divisor d y el cociente q . Representar el resto.
- 13º) Un joven tiene 15 años de edad. Representar su edad: a) hace x años; b) dentro de x años.
- 14º) Un joven tiene x años. Representar su edad: a) dentro de 2 años; b) dentro de m años.
- 15º) La cifra de las centenas de un número es c , la cifra de las decenas es d y la de las unidades es u . Representar el número.
- 16º) Representar el número de pesos que hay en x billetes de 5 pesos, y billetes de 10 pesos y z billetes de 20 pesos.
- 17º) Si un automóvil camina 50 km por hora, ¿cuántos kilómetros camina en t horas? ¿En m minutos?
- 18º) Un muchacho tiene p pesos. Si ha gastado m reales y n pesetas, representar los centavos que le quedan.
- 19º) Un rectángulo tiene una anchura de x pies y doble largo que ancho. Representar: a) su perímetro; b) su área.
- 20º) Juan hace un trabajo en x días. ¿Qué parte del trabajo hace en un día?

63. Resolución de problemas.

Toda cuestión en la que se persigue la determinación de uno o varios números desconocidos mediante la relación (o relaciones) que existen entre ellos y otros conocidos, se dice que es un *problema*.

Los números y las relaciones conocidas constituyen los *datos* del problema. Los números cuya determinación se pide son las *incógnitas*.

En lo que sigue ilustraremos con numerosos ejemplos la técnica de la resolución de los problemas por medio de ecuaciones (resolución algebraica).

En el proceso de resolución algebraica de un problema distinguiremos las etapas siguientes:

- 1) Representación.
- 2) Planteo de la ecuación.
- 3) Resolución de la ecuación.
- 4) Verificación de la solución hallada.

La primera etapa o representación consiste en el empleo del simbolismo algebraico para designar la incógnita (o las incógnitas) así como algunas operaciones en que intervenga la incógnita (o las incógnitas).

En la segunda etapa, o planteo de la ecuación, se escribe la ecuación algebraica que traduce alguna condición de igualdad que establezca el enunciado del problema.

En la tercera etapa se procede a la resolución de la ecuación en la forma ya estudiada en § 61.

Finalmente, se comprueba si la solución hallada satisface los requisitos del problema.

Ejemplos.

1. *El triplo de un número es igual al número aumentado en 8. Hallar el número.*

1) *Representación.* Si designamos el número desconocido por x , el triple de este número se representará por $3x$. Por otra parte, el número aumentado en 8 se representará por $x + 8$.

Esquemáticamente indicaremos la representación algebraica en la siguiente forma:

El número	x
El triplo del número	$3x$
El número aumentado en 8	$x + 8$

2) *Planteo.* Puesto que el triplo del número es igual al número aumentado en 8, se tiene

$$3x = x + 8.$$

Esta ecuación algebraica traduce la condición de igualdad que contiene el enunciado.

3) *Resolución.* Aplicando la regla dada en § 61 obtenemos sucesivamente

$$3x - x = 8$$

$$2x = 8$$

$$x = 4.$$

Por tanto, 4 es el número buscado.

4) *Verificación.* El triplo de 4 es 12, y 4 aumentado en 8 es también 12.

2. *Pepe y Antonio tienen conjuntamente 50 \$. Antonio tiene 12 \$ más que Pepe. ¿Cuántos pesos tiene cada uno?*

1) *Representación.*

Número de pesos que tiene Pepe	x
Número de pesos que tiene Antonio	$x + 12$
Número de pesos que tienen conjuntamente	$x + (x + 12)$

2) *Planteo.*

$$x + (x + 12) = 50$$

3) *Resolución.*

$$x + x + 12 = 50$$

$$2x = 50 - 12$$

$$2x = 38$$

$$x = 19.$$

Por tanto, Pepe tiene 19 \$ y Antonio tendrá 12 \$ más, o sea, 31 \$.

4) *Verificación.*

$$19 \$ + 31 \$ = 50 \$.$$

3. *La suma de dos números es 35 y su diferencia es 5. Hallar los números.*

1) Representación.

Si se representa por x el número menor, el número mayor se representará por $x + 5$ puesto que se sabe que la diferencia entre ambos es 5, es decir, se sabe que el mayor excede al menor en 5 unidades. Se tiene, por tanto,

número menor	x
número mayor	$x + 5$
suma de ambos	$x + (x + 5)$

2) Planteo.

$$x + (x + 5) = 35$$

3) Resolución.

$$x + x + 5 = 35$$

$$2x = 35 - 5$$

$$2x = 30$$

$$x = 15.$$

El número menor es, pues, 15, y el mayor será $15 + 5 = 20$.

4) Verificación.

$$20 + 15 = 35$$

$$20 - 15 = 5.$$

La primera etapa de la resolución de un problema, la que hemos llamado **representación**, es muy importante. Muchos principiantes tienen dificultad en plantear la ecuación algebraica que corresponde a un problema pero es porque pretenden hacerlo "saltando" la representación, o sin haberla especificado claramente.

EJERCICIO 42.

Resuélvanse los problemas siguientes:

1º) El duplo de un número es igual al número aumentado en 15. Hallar el número.

2º) Cuatro veces un número es igual al número aumentado en 30. Hallar el número.

3º) El duplo de un número más el triplo del mismo número es igual a 20. Hallar el número.

- 4º) Si el triple de un número se resta de ocho veces el número el resultado es 45. Hallar el número.
- 5º) Pedro tiene tres veces el número de naranjas que tiene Juan y entre los dos tienen 48 naranjas. ¿Cuántas naranjas tiene cada uno?
- 6º) Julio y su hermano tienen conjuntamente 10 \$ y Julio tiene 1 \$ más que su hermano. ¿Cuánto tiene cada uno?
- 7º) La suma de las edades de un padre y su hijo es 60 años y la edad del padre es el quíntuplo de la edad del hijo. ¿Cuál es la edad de cada uno?
- 8º) Hallar dos números consecutivos cuya suma sea 51.
- 9º) Hallar tres números consecutivos cuya suma sea 63.
- 10º) La suma de dos números es 27 y su diferencia es 7. Hallar los números.
- 11º) Hallar dos números que sumados den 131 y restados den 63.
- 12º) Tres personas A, B y C reciben una herencia de 3 500 \$, B recibe el triple de lo que recibe A; y C el duplo de lo que recibe B. ¿Cuánto corresponde a cada uno?
- 13º) Un aeroplano va de la Habana a Miami y regresa en 100 minutos. A causa del viento el viaje de ida demora 12 minutos más que el de regreso. ¿Cuántos minutos demora cada viaje?
- 14º) En una clase de 47 alumnos hay 9 varones más que niñas. ¿Cuántos varones y cuántas niñas hay?
- 15º) En una clase de 80 alumnos el número de aprobados es 4 veces el número de suspensos. ¿Cuántos aprobados y cuántos suspensos hay?
- 16º) El cuerpo de un pez pesa 4 veces lo que pesa la cabeza y la cola 2 libras más que la cabeza. Si el pez pesa 22 libras, ¿cuál es el peso de cada parte?
- 17º) El largo de un rectángulo es el triple del ancho y su perímetro (suma de los lados) es de 56 cm. Hallar sus dimensiones.
- 18º) En una batalla aérea en Corea los norcoreanos perdieron 17 aviones más que los norteamericanos. Si en total se perdieron 25, ¿cuántos aviones perdió cada uno?
- 19º) Una compañía ganó 30 000 dólares en 3 años. En el segundo año ganó el doble de lo que había ganado en el primero y en el tercer año ganó tanto como en los dos años anteriores juntos. ¿Cuál fué la ganancia en cada año?
- 20º) Un terreno rectangular tiene de ancho 5 metros menos que de largo y su perímetro es de 95 m. Hallar sus dimensiones.
- 21º) Hay cuatro números cuya suma es 90. El segundo número es el doble del primero, el tercero es el doble del segundo y el cuarto es el doble del tercero. ¿Cuáles son los números?
- 22º) La suma de cuatro números consecutivos es 198. Hallar los números.
- 23º) La suma de tres números impares consecutivos es 99. Hallar dichos números.

24º) Un caballo con su silla valen 1 400 \$. Si el caballo vale 900 \$ más que la silla, ¿cuánto vale cada uno?

25º) Se han comprado dos piezas de una máquina de la misma medida y del mismo fabricante. Una de ellas se compró al precio de lista y la otra con rebaja del 25 %. Si por las dos se pagaron 52,50 dólares, ¿cuánto se pagó por cada una?

4. Luis tiene 3 veces tanto dinero como José. Si diese a José 20 \$ entonces tendría solamente el doble. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

1) Representación.

	Número de pesos que tienen	Número de pesos que tendrían si 20 \$ cambiasen de mano
José	x	$x + 20$
Luis	$3x$	$3x - 20$

2) Planteo.

Puesto que Luis tendrá el doble que José después de darle 20 \$, resulta

$$3x - 20 = 2(x + 20)$$

3) Resolución.

$$3x - 20 = 2x + 40$$

$$3x - 2x = 40 + 20$$

$$x = 60.$$

Por tanto, José tiene 60 \$ y Luis tiene tres veces esta cantidad, o sea, 180 \$.

4) Verificación.

$$60 \$ + 20 \$ = 80 \$$$

$$180 \$ - 20 \$ = 160 \$ = 2 \times 80 \$.$$

5. La edad de un padre es el cuádruplo de la de su hijo y dentro de 5 años será el triple. Hallar la edad actual de cada uno.

1) Representación.

	Edades actuales	Edades dentro de 5 años
Padre	$4x$	$4x + 5$
Hijo	x	$x + 5$

2) Planteo.

Puesto que dentro de 5 años la edad del padre será el triple de la del hijo, se tiene

$$4x + 5 = 3(x + 5)$$

3) Resolución.

$$4x + 5 = 3x + 15$$

$$4x - 3x = 15 - 5$$

$$x = 10.$$

La edad actual del hijo es, pues, 10 años. La edad actual del padre es $4 \times 10 = 40$ años.

4) Verificación.

$$10 + 5 = 15$$

$$40 + 5 = 45 = 3 \times 15.$$

6. Un terreno rectangular tiene 40 pies más de largo que de ancho. Si tuviese 20 pies menos de largo y 10 pies más de ancho su área sería la misma. Calcular sus dimensiones.

1) Representación.

	dimensiones actuales	dimensiones modificadas
ancho	x	$x + 10$
largo	$x + 40$	$x + 20$
área	$x(x + 40)$	$(x + 10)(x + 20)$

2) Planteo.

Como en ambos casos el terreno tiene la misma área resulta

$$x(x + 40) = (x + 10)(x + 20).$$

3) Resolución.

$$x^2 + 40x = x^2 + 30x + 200$$

$$10x = 200$$

$$x = 20 \text{ (ancho)}$$

$$\therefore x + 40 = 60 \text{ (largo)}.$$

4) Verificación.

El área actual es de $20 \times 60 = 1\,200$ pies².

Las dimensiones modificadas serían

$$\text{ancho} = 30 \text{ pies,} \quad \text{largo} = 40 \text{ pies}$$

y el área valdría $30 \times 40 = 1\,200$ pies², que es igual a la anterior.

EJERCICIO 43.

1º) A tiene doble dinero que B. Si A diese 15 \$ a B entonces tendrían la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto tiene cada uno?

2º) A tiene tres veces tanto dinero como B. Si A da 25 \$ a B tiene entonces el doble que B. ¿Cuánto tienen cada uno al principio?

3º) La suma de dos números es 24. Tres veces el mayor excede en 2 unidades a cuatro veces el menor. Hallar los números.

4º) Entre Juan y Jenaro tenían 100 \$. Juan duplicó su dinero y Jenaro triplicó el suyo y ahora Jenaro tiene 25 \$ más que Juan. ¿Cuánto tenía cada uno al principio?

5º) El duplo de las horas que han transcurrido de un día es igual al cuádruplo de las que quedan por transcurrir. Averiguar la hora.

6º) Seis amigos van a comprar un terreno a partes iguales. A última hora dos de ellos desisten y esto hace que cada uno de los otros tenga que aportar 500 \$ más. ¿Cuál es el valor del terreno?

7º) A tiene 9 \$ y B tiene 6 \$. B le da a A cierta cantidad y entonces A tiene el cuádruplo de lo que tiene B. ¿Cuánto le dió B a A?

8º) La edad de un padre es el triple de la de su hijo y dentro de 10 años será el doble. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

9º) La edad de un padre es el cuádruplo de la de su hijo. Hace 3 años era el quíntuplo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

10º) La edad de un padre es ahora el duplo de la de su hijo, pero hace 20 años era el cuádruplo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

11º) Hace 5 años la edad de un padre era el triple de la de su hijo y dentro de 5 años será el doble. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

12º) Hace 4 años un padre tenía 8 veces la edad de su hijo. Actualmente la edad del padre es 4 veces la de su hijo. ¿Cuál es la edad de cada uno?

13º) La suma de las edades de dos hermanos es 25 años. La edad del menor es dos tercios de la edad del mayor. ¿Cuál es la edad de cada uno?

14º) Una madre lleva a su hija 24 años. Dentro de 6 años la edad de la madre será el triple de la edad de la hija. Averiguar la edad actual de cada una.

15º) Juan tiene 11 años y Pedro tiene 28 años. ¿Dentro de cuántos años la edad de Pedro será el doble de la de Juan?

16º) José tiene 7 años y Luis tiene 25 años. ¿Dentro de cuántos años la edad de Luis será el triple de la de José?

17º) La edad actual de Manuel es el triple de la edad que tenía hace 20 años. ¿Cuál es su edad actual?

18º) A tiene 20 años y B tiene 12 años. ¿Cuándo la edad de A será el doble de la de B?

19º) El denominador de un quebrado excede en 2 unidades al numerador. Si se suma 1 al numerador y 1 al denominador el nuevo quebrado equivale a $\frac{2}{3}$. Hallar el quebrado primitivo.

20º) El denominador de un quebrado excede en 3 unidades al numerador. El triple del denominador excede al cuádruplo del numerador en 4 unidades. ¿Cuál es el quebrado?

21º) Un rectángulo tiene 20 m más de largo que de ancho. Si el largo tuviese 100 m más y el ancho 40 m menos el área sería la misma. Hallar las dimensiones del rectángulo primitivo.

22º) El largo de un rectángulo excede al ancho en 30 m. Si el largo se aumenta en 10 m y el ancho se disminuye en 6 m el área resulta la misma. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

23º) Un rectángulo y un cuadrado tienen la misma área. El largo del rectángulo es 6 m mayor que el lado del cuadrado y su ancho es 4 m menor que el lado del cuadrado. Hallar las dimensiones y el área del cuadrado y del rectángulo.

24º) La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es 61. Hallar los números.

25º) La diferencia de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 80. Hallar los números.

7. Dividir un ángulo de 60° en dos partes cuyas medidas estén en la razón 5 : 7.

1) **Representación.**

Puesto que

$$\frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

representaremos por $5x$ el número de grados en una de las partes en que se ha de dividir el ángulo dado, y por $7x$ el número de grados en la otra parte. Esto es:

1ª parte	$5x$
2ª parte	$7x$

2) **Planteo.**

La suma de las medidas de las partes debe dar la medida del ángulo total. Por consiguiente:

$$5x + 7x = 60.$$

3) **Resolución.**

$$12x = 60$$

$$x = 5$$

$$\therefore 5x = 25, \quad 7x = 35$$

Es decir, una de las partes ha de tener 25° y la otra 35° .

4) **Verificación.**

$$25^\circ + 35^\circ = 60^\circ, \quad 25^\circ : 35^\circ = 5 : 7.$$

8. Antonio tiene 4 \$ en monedas de 5 y de 20 centavos. Si en total tiene 29 monedas, ¿cuántas son de 5 y cuántas de 20 centavos?

1) **Representación.**

	Número de monedas	Valor en centavos
De 5 centavos	x	$5x$
De 20 centavos	$29 - x$	$20(29 - x)$

2) *Planteo.*

Como Antonio tiene en total 4 \$ ó 400 centavos, resulta

$$5x + 20(29 - x) = 400$$

3) *Resolución.*

$$\begin{aligned} 5x + 580 - 20x &= 400 \\ -15x &= -180 \\ x &= 12. \end{aligned}$$

Por tanto, el número de monedas de 5 centavos que tiene Antonio es 12. Y el número de monedas de 20 centavos es $29 - 12 = 17$.

4) *Verificación.*

$$\begin{aligned} 5 \times 12 &= 60 \text{ ctvs.} \\ 20 \times 17 &= 340 \text{ ctvs.} \\ \hline 400 \text{ ctvs.} &= 4 \$. \end{aligned}$$

9. En un número de dos cifras la cifra de las decenas excede en 5 a la cifra de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras resulta un nuevo número que sumado con el anterior da 121. Averiguar el número.

1) *Representación.*

La representación polinómica de un número de dos cifras, según vimos en § 62, es de la forma $10d + u$, siendo d la cifra de las decenas del número y u la cifra de las unidades.

Si en el problema propuesto llamamos x a la cifra de las unidades, la cifra de las decenas se podrá representar por $x + 5$ (puesto que se sabe que excede en 5 a la cifra de las unidades). La expresión polinómica del número será entonces

$$10(x + 5) + x.$$

Si se invierte el orden de las cifras (si se escribe, por ejemplo, 64 en vez de 46), la expresión polinómica del número obtenido será

$$10x + (x + 5).$$

En resumen:

Cifra de las unidades	x
Cifra de las decenas	$x + 5$
El número	$10(x + 5) + x$
El número invertido	$10x + (x + 5)$

2) *Planteo.*

Puesto que si el número con las cifras invertidas se suma al número el resultado es 121, escribiremos

$$10(x + 5) + x + 10x + (x + 5) = 121.$$

3) *Resolución.*

$$10x + 50 + x + 10x + x + 5 = 121$$

$$22x = 66$$

$$x = 3.$$

La cifra de las unidades del número es 3 y, por tanto, la cifra de las decenas es $3 + 5 = 8$. El número buscado es, pues, 83.

4) *Verificación.*

$$83 + 38 = 121.$$

EJERCICIO 44.

1º) Dividir un ángulo de 90° en dos partes cuyas medidas estén entre sí como 7 : 8.

2º) Dividir un ángulo de 180° en dos partes cuyas medidas estén entre sí como 4 : 5.

3º) La longitud de un rectángulo es a su anchura como 5 : 3 y su perímetro es de 112 cm. Hallar las dimensiones del rectángulo.

4º) Un ganadero tiene 528 reses que quiere poner a pastar en dos terrenos, uno de 15 ha y otro de 33 ha, de modo que haya en cada parcela el mismo número de cabezas de ganado por hectárea. ¿Cuántas reses debe poner en cada una?

5º) Los ángulos A, B, C de un triángulo están entre sí como 2 : 3 : 5. Se sabe que $A + B + C = 180^\circ$. Hallar el valor de cada ángulo.

6º) A tiene 3.30 \$ en monedas de 10 ctvs. y de 20 ctvs. Si tiene en total 24 monedas, ¿cuántas son de cada clase?

7º) Un muchacho tiene 3,50 \$ en piezas de 5 ctvs. y de 10 ctvs. Si el número de piezas de 5 ctvs. es el triple del número de piezas de 10 ctvs., ¿cuántas piezas tiene de cada clase?

8º) Un hombre tiene 45 \$ en billetes de 5 \$ y de 1 \$. Si el número de billetes de 1 \$ es el cuádruplo del número de billetes de 5 \$, ¿cuántos billetes tiene de cada denominación?

9º) En una alcancía hay 65 monedas que suman 8,75 \$. El número de piezas de 20 ctvs. es el doble del número de piezas de 5 ctvs. y las restantes monedas son de 10 ctvs. ¿Cuántas hay de cada clase?

10º) La entrada en un cine cuesta 10 \$ los mayores y 6 \$ los menores. Una noche entraron 320 personas y pagaron 2 720 \$. ¿Cuántos mayores y cuántos menores entraron?

11º) En un número de dos cifras, la cifra de las unidades excede en 2 la cifra de las decenas. Si al número se le agrega el triple de sus unidades resulta 36. Averiguar el número.

12º) La diferencia entre la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número de dos cifras es 6. Si al número se le agrega el duplo de la suma de los valores absolutos de sus cifras se obtiene 87. Hallar el número.

13º) En un número de dos cifras la cifra de las decenas es igual al duplo de las cifras de las unidades. Si al número se resta 27 se obtiene otro número con las mismas cifras pero en orden inverso. ¿Cuál es el número?

14º) La cifra de las unidades de un número de dos cifras es igual al triplo de la cifra de las decenas. Si el número se divide entre la cifra de las unidades el cociente es 4 y el residuo es 1. Hallar el número. (Téngase en cuenta la relación $\text{dividendo} = \text{divisor} \times \text{cociente} + \text{residuo}$).

15º) La cifra de las decenas de un número de dos cifras excede en 3 a la cifra de las unidades. Si el número se divide entre la suma de sus cifras el cociente es 7 y el residuo es 3. Hallar el número.

16º) La cifra de las decenas de un número de 3 cifras excede en 1 a la cifra de las unidades y la cifra de las centenas es igual al duplo de la cifra de las decenas. La suma de los valores absolutos de las cifras del número es 7. ¿Cuál es el número?

17º) En un número de 3 cifras la cifra de las unidades excede en 5 a la cifra de las centenas y la cifra de las decenas excede en 1 a la cifra de las centenas. La cifra de las unidades es el duplo de la suma de las cifras de las decenas y centenas. ¿Cuál es el número?

18º) En un número de 3 cifras la cifra de las centenas excede en 5 unidades a la cifra de las decenas. La cifra de las decenas aumentada en 2 es igual a la cifra de las unidades. Si al número se agrega la suma de los valores absolutos de sus cifras se obtiene 851. Hallar el número.

19º) La cifra de las unidades de un número de tres cifras es el duplo de la cifra de las decenas; y la cifra de las decenas es el duplo de la cifra de las centenas. Si se invierte el orden de las cifras y del número resultante se resta el número primitivo se obtiene 594. ¿Cuál es el número?

20º) Las cifras de un número de tres cifras son tres números consecu-

tivos, siendo la cifra de las centenas el número menor y la cifra de las unidades el número mayor. Si el número se divide por el número de dos cifras que forman las decenas y unidades el cociente es 8 y el resto es también 8. Hallar el número.

EJERCICIO 45. (REPASO).

1º) Resolver y comprobar las ecuaciones siguientes:

a) $4x - 5 = 2x + 7$

b) $6 - 7x - 14 = 8 - 2x + 3x$

c) $1,4 + 2,1x = 6,4 - 1,9x$

d) $4(2x - 1) + 3 = 6(x - 1)$

e) $2(x - 3) - 3(x - 1) = 5(x + 3)$

f) $x - [5 - (2x - 1)] = 1 - x$

g) $1 - \{x - [3x - (2 - x)] + 1\} = x + 3$

h) $x^2 - (x + 1)(x - 3) = 4(x - 2)$

i) $(y + 1)(y - 3) + (y - 1)(y + 3) = 2y(y + 2)$

j) $(x - 2)(x - 3) - (x + 2)(x + 1) = x - [2 - (x - 4)]$

2º) Representar algebraicamente:

a) El duplo de un número más el cuadrado del mismo número.

b) Tres números impares consecutivos.

c) La edad actual de una persona que hace x años tenía 25 años.

d) Un número cuya cifra de los millares es x , cuya cifra de las centenas es $2x$, cuya cifra de las decenas es $x + 2$ y cuya cifra de las unidades es $x - 1$.

e) El número de pesos en m billetes de 10 \$, n billetes de 50 \$ y p billetes de 100 \$.

3º) Seis veces un número es igual al duplo del mismo número más 28. Hallar el número.

4º) A tiene cuatro veces tantas fichas como B y entre ambos tienen 160 fichas. ¿Cuántas tiene cada uno?

5º) Hallar tres números pares consecutivos cuya suma es 78.

6º) A, B y C son socios. ¿Cómo deben repartirse una ganancia de 6 600 \$ si a C corresponde el triple de lo que corresponde a B y a A la mitad de lo que corresponde a C?

7º) José tiene doble dinero que Pedro. Si José da 30 \$ a Pedro entonces éste tiene 10 \$ más que José. ¿Cuánto tiene cada uno?

8º) A y B juegan uno contra otro. A empieza con doble dinero que B pero pierde 90 \$ y entonces A tiene la quinta parte de lo que tiene B. ¿Con cuánto comenzó cada uno?

9º) A, B y C van a comprar un almacén a partes iguales. Si admitiesen un socio más, cada uno tendría que aportar 6 000 \$ menos. ¿Cuánto vale el almacén?

10º) La edad de un padre es el quintuplo de la de su hijo. Dentro de 7 años la edad del padre será el triple de la edad del hijo. Hallar la edad actual de cada uno.

11º) Un padre tiene 31 años y su hijo 4. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el doble de la del hijo?

12º) Dividir un ángulo de 120° en dos partes cuyas medidas estén entre sí como 7 : 3.

13º) El denominador de un quebrado es igual al duplo del numerador más 1. Si se suma 4 al numerador y al denominador, el nuevo quebrado se reduce a $\frac{2}{3}$. Hallar el quebrado primitivo.

14º) Un rectángulo tiene 4 m más de largo que de ancho. Si el largo tuviese 10 m más y el ancho 8 m menos el área sería la misma. ¿Cuáles son sus dimensiones?

15º) Tengo 280 \$ en billetes de 5, 10 y 20 pesos. En total tengo 26 billetes y hay tantos billetes de 5 \$ como de 20 \$. ¿Cuántos tengo de cada clase?

16º) La cifra de las decenas en un número de dos cifras es el triple de la cifra de las unidades. Si del número se resta la suma de los valores absolutos de sus cifras se obtiene 81. ¿Cuál es el número?

17º) En un número de tres cifras la cifra de las centenas es el duplo de la cifra de las unidades. La cifra de las unidades excede en 1 la cifra de las decenas. Si del número se resta 297 se obtiene otro número con las mismas cifras en orden inverso. ¿Cuál es el número?

18º) Un estanque tiene 2 000 litros de capacidad y contiene una cantidad de agua que es los dos tercios de lo que le falta para llenarse. ¿Qué cantidad de agua hay en el estanque?

19º) Un capitalista dispone de 20 000 \$ que invierte parte al 3 % y parte al 4 % de interés anual. Si el interés total que percibe es de 680 \$, determinar las cantidades que ha invertido al 3 % y al 4 % respectivamente.

20º) En una sección del parque zoológico hay llamas y avestruces. Si hay 17 cabezas y 56 patas, ¿cuántos animales hay de cada clase?

21º) Con el dinero que tiene Juan puede comprar 7 naranjas y le sobran 30 centavos, o bien comprar 4 manzanas y le sobran 20 centavos. Si cada manzana vale 40 centavos más que cada naranja, ¿cuál es el precio de cada fruta y cuánto dinero tiene Juan?

22º) A empieza un juego y gana 10 \$. Después duplica su dinero, pierde 25 \$ y queda igual que al principio. ¿Con cuánto dinero comenzó el juego?

23º) Un hombre empieza a jugar y pierde 20 \$. Después duplica lo que le queda, pierde 15 \$, triplica lo que le queda y sale ganando 80 \$. ¿Con cuánto comenzó el juego?

24º) En un velódromo entraron 18 400 espectadores. Había 900 más

hombres que mujeres y el número de niños era la tercera parte del número de mujeres. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños entraron?

25º) Determinar la cantidad de agua que se debe agregar a 10 litros de solución de ácido nítrico al 60 % para reducirla a una solución al 50 %. (Se dice que una solución de ácido nítrico es al 60 % cuando contiene 60 gramos de ácido nítrico en 100 cm³ de solución).

26º) El radiador de un automóvil contiene 16 litros de una mezcla que tiene 20 % de antióxido. Se quiere sacar una parte de la mezcla y reemplazarla con antióxido puro con el fin de elevar el porcentaje de antióxido en la mezcla a 25 %. ¿Qué cantidad debe reemplazarse?

TEST 6.

1º) Dada la ecuación

$$2x - 1 = x + 3,$$

decir cuáles de las ecuaciones siguientes son equivalentes a ella:

a) $2x + 1 = x - 3$

b) $2x - x = 1 + 3$

c) $x + 3 = 2x - 1$

d) $2x + x = 3 - 1.$

2º) Decir cuál de los siguientes valores es solución de la ecuación

$$3x - 8 = 12 - x,$$

a) $x = -5$

b) $x = 1$

c) $x = 5.$

3º) Representar algebraicamente:

a) El cubo de un número menos el cuadrado del mismo número.

b) El número de centavos y céntimos en x pesos, y pesetas y z reales.

4º) Si $3x - 1$ representa 20, ¿cuánto representa $x + 5$?

5º) Resolver:

$$(x - 2)(x + 1) - (x - 1)(x + 3) = 5x + 2.$$

6º) Resolver:

$$x - \{2x + [x - (5 - x)] - 1\} = 10.$$

7º) Un rectángulo tiene 15 m más de largo que de ancho y su perímetro es de 110 m. ¿Cuáles son sus dimensiones?

8º) A y B juegan entre sí. B empieza con triple dinero que A, pero pierde 5 \$ y entonces tiene doble que A. ¿Cuánto dinero tenía cada uno al comenzar?

9º) Un padre tiene 30 años más que su hijo. Hace 3 años la edad del padre era 7 veces la edad del hijo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

10º) José tiene 2,65 pesetas en monedas de 10 y 25 céntimos. En total tiene 16 monedas. ¿Cuántas son de cada clase?

CAPÍTULO 7.

PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES.

64. Productos notables.

Así como en Aritmética se hace prácticamente indispensable aprender de memoria las tablas de multiplicar, en Álgebra hay ciertos productos simples que se presentan con tanta frecuencia que conviene memorizarlos, para no tener necesidad de efectuar las multiplicaciones correspondientes repetidas veces.

Además, estos productos especiales, llamados también *notables*, proporcionan los tipos más elementales de expresiones algebraicas que pueden ser factorizadas (o descompuestas en factores), como veremos en el capítulo próximo.

He aquí una relación de los productos más importantes:

$$64-1 \quad m(a + b + c) = ma + mb + mc$$

$$64-2 \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$64-3 \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$64-4 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$64-5 \quad (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$64-6 \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$64-7 \quad (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$64-8 \quad (ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

$$64-9 \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$64-10 \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$64-11 \quad (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$64-12 \quad (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Todos estos productos pueden ser obtenidos fácilmente sin más que realizar las multiplicaciones correspondientes. Varios de ellos figuran en los ejemplos ilustrativos o en los ejercicios propuestos del capítulo 5.

El lector debe tener en cuenta que las letras que aparecen en los productos notables enumerados arriba pueden representar números cualesquiera, o bien, expresiones algebraicas más o menos complejas.

Por ejemplo, en § 64-6 se puede suponer

$$a = 3m, \quad b = 2$$

y resulta entonces

$$(3m + 2)(3m - 2) = 9m^2 - 4.$$

Si en la 64-11 hacemos $a = x^2$, $b = y^2$ se obtiene

$$(x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) = x^6 + y^6$$

etc.

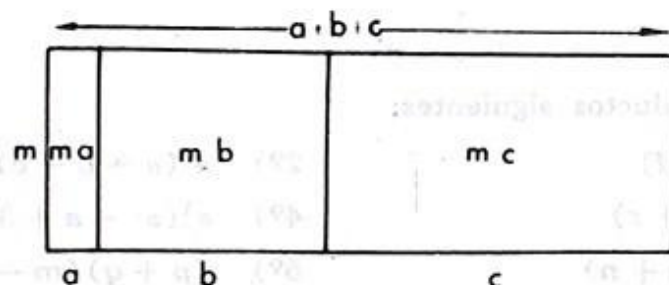
Para captar la gran generalidad de muchos resultados de cálculo algebraico conviene enunciar las reglas correspondientes en lenguaje ordinario. Esto es lo que hacemos en los párrafos siguientes con los productos notables; luego seguiremos la misma práctica con otros resultados igualmente importantes de cálculo algebraico.

Ayuda mucho a recordar estas reglas el aplicárlas inmediatamente a numerosos ejemplos. Este es el objeto de los ejercicios que figuran en este capítulo. En algunos casos daremos también ilustraciones geométricas de dichas reglas.

$$64-1 \quad m(a + b + c) = ma + mb + mc$$

REGLA. El producto de un monomio por una suma algebraica es igual a la suma algebraica de los productos del monomio por cada término de la suma.

Esta regla resulta de una aplicación inmediata de la ley distributiva y ya se consideró en § 51. La figura proporciona una



interesante interpretación geométrica en el caso en que las letras m , a , b , c representen números positivos. (Obsérvese que el área

del rectángulo de la figura puede representarse indistintamente por el primero o por el segundo miembro de § 64-1).

Ejemplos.

$$x^2(2a + 3b - c) = 2ax^2 + 3bx^2 - cx^2$$

$$5p(x^2 - y^2 + z^2) = 5px^2 - 5py^2 + 5pz^2$$

$$x^3(x^2 - 2x + 3) = x^5 - 2x^4 + 3x^3.$$

$$64-2 \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

REGLA. El producto de dos binomios cualesquiera es un polinomio cuyos términos son los productos de cada término del primer binomio por cada término del segundo binomio.

Este no es sino un caso particular de la regla para multiplicar dos polinomios cualesquiera (véase § 52).

En el caso de que las letras a, b, c, d representen números positivos, la figura proporciona una interpretación geométrica

d	ad	bd
	ac	bc
	a	b

de la regla precedente. (Obsérvese que el área del rectángulo mayor puede representarse por $(a + b)(c + d)$, o por $ac + ad + bc + bd$.

Ejemplos.

$$(2a + b)(3c + d) = 6ac + 2ad + 3bc + bd$$

$$(a - b)(x - y) = ax - ay - bx + by.$$

EJERCICIO 46.

Efectuar los productos siguientes:

1º $a(b + c - d)$

2º $a^2(a - b + c)$

3º $2x^2(x + y + z)$

4º $a^3(a^2 - a + 3)$

5º $(p + q)(m + n)$

6º $(p + q)(m - n)$

7º $(x - y)(u - v)$

8º $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

9º $(3x - 2y)(a + b)$

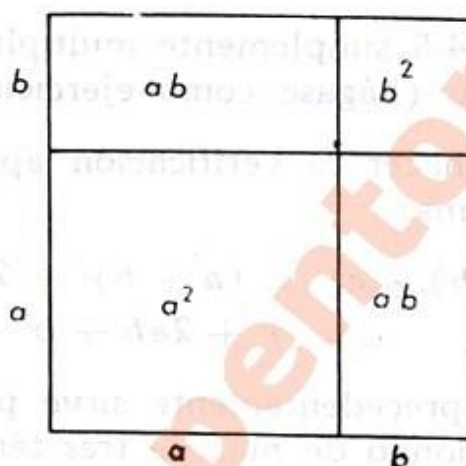
10º $(2x - y)(3a - 2b).$

$$64-3 \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

REGLA. El cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primer término, más el duplo del producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Este producto notable es un caso particular del 64-2. Suponiendo, en efecto, que el segundo factor de 64-2 es igual al primero, esto es, haciendo $c = a$, $d = b$, se obtiene 64-3.

La figura proporciona una interesante interpretación geométrica de la regla anterior, en el caso en que las letras a y b representen números positivos.



Ejemplos.

$$(20 + 5)^2 = 20^2 + 2 \times 20 \times 5 + 5^2$$

$$\text{ó} \quad 25^2 = 400 + 200 + 25 = 625$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$64-4 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

REGLA. El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primer término, menos el duplo del producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Esta regla se halla, en realidad, contenida en 64-3 pues la palabra *suma* debe entenderse allí en el sentido de suma algebraica. Puesto que $a - b = a + (-b)$ se obtiene

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= [a + (-b)]^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2. \end{aligned}$$

Ejemplos.

$$17^2 = (20 - 3)^2 = 20^2 - 2 \times 20 \times 3 + 3^2 \\ = 400 - 120 + 9 = 289$$

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$(a^2 - x^2)^2 = a^4 - 2a^2x^2 + x^4.$$

$$64-5 \quad (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

REGLA. El cuadrado de un trinomio es igual a la suma de los cuadrados de sus términos más la suma de los **duplos** de los productos de cada término por cada uno de los términos que siguen a él.

Se puede verificar 64-5 simplemente multiplicando el trinomio $a + b + c$ por sí mismo (hágase como ejercicio).

También se puede hacer la verificación aplicando dos veces 64-3 en la siguiente forma:

$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \\ = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

La regla enunciada precedentemente sirve para hallar el cuadrado de cualquier polinomio de más de tres términos.

Ejemplos.

$$(2a + 3b + 4c)^2 = 4a^2 + 9b^2 + 16c^2 + 12ab + 16ac + 24bc$$

$$(x^2 - y^2 - z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 + 2y^2z^2.$$

EJERCICIO 47.

Aplicar las reglas dadas anteriormente a los ejemplos siguientes:

1º) $(c + d)^2$

2º) $(3a + b)^2$

3º) $(x + 2y)^2$

4º) $(a + 1)^2$

5º) $(3 + b)^2$

6º) $(4x + y)^2$

7º) $(a^2 + b^2)^2$

8º) $(x^3 + y^3)^2$

9º) $(x^2 + x)^2$

10º) $(a^2 + b^3)^2$

11º) $(x - y)^2$

12º) $(x - 3)^2$

13º) $(5 - a)^2$

14º) $(2a - 3b)^2$

15º) $(a - 4b)^2$

16º) $(3x - 1)^2$

17º) $(x^2 - y^2)^2$

18º) $(p^2 - q^2)^2$

19º) $(x^3 - y^3)^2$

20º) $(a^2 - b^3)^2$

21º) $(x + y + z)^2$

22º) $(x - y + z)^2$

23º) $(3a + 2b - c)^2$

24º) $(x^2 + y^2 - z^2)^2$

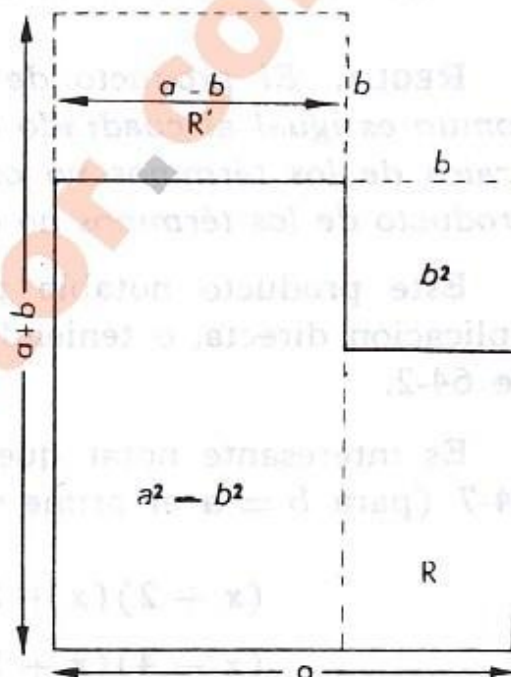
$$64-6 \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

REGLA. El producto de la suma de dos expresiones algebraicas por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.

Véanse a continuación, a la izquierda, la verificación algebraica de la regla anterior y, a la derecha, una interpretación geométrica de la misma, válida en el caso en que a y b representen números positivos.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$

Si del cuadrado de lado a se quita el cuadrado de lado b queda una figura de área $a^2 - b^2$. Esta figura se transforma en un rectángulo de lados $a + b$ y $a - b$ sin más que mover el pequeño rectángulo R a la posición R' .



Ejemplos.

$$(a + 2)(a - 2) = a^2 - 4$$

$$(3x + 5y)(3x - 5y) = 9x^2 - 25y^2$$

$$(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = x^4 - y^4$$

$$\begin{aligned} (a + b + c)(a + b - c) &= [(a + b) + c][(a + b) - c] \\ &= (a + b)^2 - c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - c^2. \end{aligned}$$

EJERCICIO 48.

Aplicar la regla anterior a los ejemplos siguientes:

1º) $(11 + 3)(11 - 3)$

2º) $(x + y)(x - y)$

3º) $(a + 1)(a - 1)$

4º) $(x + 3)(x - 3)$

5º) $(x - 5y)(x + 5y)$

6º) $(2a - b)(2a + b)$

7º) $(3a + 2b)(3a - 2b)$

8º) $(x + 10)(x - 10)$

9º) $(6 - a)(6 + a)$

10º) $(ab + 2)(ab - 2)$

11º) $(a^2 + b)(a^2 - b)$

12º) $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$

13º) $(x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$

14º) $(5ax + y)(5ax - y)$

15º) $(3p^2 + 2q^2)(3p^2 - 2q^2)$

16º) $(0,2 + a^3)(0,2 - a^3)$

17º) $(x + y + z)(x + y - z)$

18º) $(ax + by + c)(ax + by - c)$

19º) $(1 + a + b)(1 + a - b)$

20º) $(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$.

64-7 $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

REGLA. El producto de dos binomios que tienen un término común es igual al cuadrado del término común, más la suma algebraica de los términos no comunes por el término común, más el producto de los términos no comunes.

Este producto notable puede verificarse fácilmente por multiplicación directa, o teniendo en cuenta que es un caso particular de 64-2.

Es interesante notar que 64-3 y 64-6 son casos especiales de 64-7 (para $b = a$ el primer y para $b = -a$ el segundo).

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

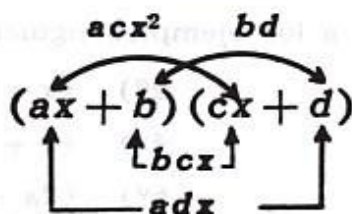
$$(x - 4)(x + 5) = x^2 + x - 20$$

$$(x - 3)(x - 5) = x^2 - 8x + 15$$

$$(x + 3y)(x - 7y) = x^2 - 4xy - 21y^2.$$

64-8 $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

La regla correspondiente a este producto notable no tiene una expresión sencilla en lenguaje corriente, por lo cual es preferible recordar su formación mediante el esquema siguiente:



Ejemplos.

$$\begin{array}{r} 8x^2 \quad 15 \\ (2x + 3)(4x + 5) = 8x^2 + 22x + 15 \end{array}$$

$$12x$$

$$10x$$

$$15x^2 - 6$$

$$(3x - 2)(5x + 3) = 15x^2 - x - 6$$

$$-10x$$

$$9x$$

$$(4x + 1)(2x - 3) = 8x^2 - 10x - 3$$

$$(2x - 5y)(3x - 4y) = 6x^2 - 23xy + 20y^2.$$

Con un poco de práctica se puede escribir el producto directamente, efectuando mentalmente las operaciones intermedias.

EJERCICIO 49.

Hallar los productos siguientes:

$$1^\circ) (x + 1)(x + 2)$$

$$2^\circ) (x + 3)(x + 4)$$

$$3^\circ) (x - 1)(x + 4)$$

$$4^\circ) (x - 2)(x - 3)$$

$$5^\circ) (x + 6)(x - 2)$$

$$6^\circ) (a + 3)(a - 1)$$

$$7^\circ) (a + 8)(a - 6)$$

$$8^\circ) (a - 5)(a - 9)$$

$$9^\circ) (y + 10)(y + 12)$$

$$10^\circ) (b + 8)(b - 12)$$

$$11^\circ) (x + 2y)(x + 3y)$$

$$12^\circ) (x - 4y)(x - 2y)$$

$$13^\circ) (a - 3b)(a + 5b)$$

$$14^\circ) (ab + 3)(ab - 4)$$

$$15^\circ) (ab + 2c)(ab - 4c)$$

$$16^\circ) (2x + 3)(3x + 2)$$

$$17^\circ) (2x + 5)(3x + 4)$$

$$18^\circ) (4x + 1)(3x + 5)$$

$$19^\circ) (2x - 3)(4x + 1)$$

$$20^\circ) (5a - 2)(3a + 4)$$

$$21^\circ) (8m + 3)(2m - 5)$$

$$22^\circ) (7b - 2)(2b - 3)$$

$$23^\circ) (9x - 1)(8x + 1)$$

$$24^\circ) (3x + 10)(2x - 15)$$

$$25^\circ) (10p - 1)(2p + 3)$$

$$26^\circ) (3x - 2y)(4x + y)$$

$$27^\circ) (2x - y)(3x + 4y)$$

$$28^\circ) (a - 2b)(2a + b)$$

$$29^\circ) (5a - 2b)(4a + 3b)$$

$$30^\circ) (4a - 7b)(3a - 10b).$$

$$64-9 \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

REGLA. El cubo de la suma de dos términos es igual al cubo del primer término, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

Puesto que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, multiplicando una vez más por $a + b$ se obtiene, efectivamente, $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Ejemplos.

$$\begin{aligned} 12^3 &= (10 + 2)^3 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot 2 + 3 \cdot 10 \cdot 2^2 + 2^3 \\ &= 1\,000 + 600 + 120 + 8 = 1\,728 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + 4)^3 &= a^3 + 3a^2(4) + 3a(4)^2 + 4^3 \\ &= a^3 + 12a^2 + 48a + 64 \end{aligned}$$

$$(x^2 + y^2)^3 = x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6$$

$$64-10 \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

REGLA. El cubo de una diferencia es igual al cubo del primer término, menos el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo.

Esta regla puede considerarse como una variante de 64-9 puesto que restar un número o expresión algebraica equivale a sumar su opuesto. Resulta así

$$\begin{aligned} (a - b)^3 &= [a + (-b)]^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \end{aligned}$$

Desde luego, 64-10 también se puede verificar por multiplicación directa (hágase como ejercicio).

Ejemplos.

$$(20 - 4)^3 = 20^3 - 3 \cdot 20^2 \cdot 4 + 3 \cdot 20 \cdot 4^2 - 4^3$$

$$(a - 1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$$

$$(2x - y^2)^3 = 8x^3 - 12x^2y^2 + 6xy^4 - y^6.$$

EJERCICIO 50.

Aplicar 64-9 ó 64-10 a los ejemplos siguientes:

1º) $(30 + 5)^3$

2º) $(x + 2)^3$

3º) $(1 + b)^3$

4º) $(2x + y)^3$

5º) $(a + 4b)^3$

6º) $(40 - 5)^3$

7º) $(x - 3)^3$

8º) $(2 - a)^3$

9º) $(x - 2y)^3$

10º) $(2a - 3b)^3$

11º) $(x^2 + y^2)^3$

12º) $(a^2 - b^2)^3$

13º) $(2x^2 + 3y^2)^3$

14º) $(3x^2 - 5y^2)^3$

15º) $(a^3 + b^3)^3$

16º) $(a^3 - b^3)^3$

17º) $(ab + c^2)^3$

18º) $(m - pq)^3$

19º) $(x^4 + y)^3$

20º) $(x - y^3)^3.$

$$64-11 \quad (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

REGLA. Multiplicando la suma de dos expresiones algebraicas cualesquiera por el polinomio homogéneo ordenado de segundo grado formado con dichas expresiones y coeficientes $+1$, -1 , $+1$, se obtiene la suma de los cubos de dichas expresiones algebraicas.

Compruébese la regla dada efectuando la multiplicación indicada (véase § 52-2).

Ejemplos.

$$(3 + 5)(3^2 - 3 \cdot 5 + 5^2) = 3^3 + 5^3$$

$$(2x + y)[(2x)^2 - (2x)y + y^2] = 8x^3 + y^3$$

$$[(x + y) + 1][(x + y)^2 - (x + y) + 1] = (x + y)^3 + 1$$

$$(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) = a^6 + b^6.$$

$$64-12 \quad (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

REGLA. Multiplicando la diferencia de dos expresiones algebraicas cualesquiera por el polinomio homogéneo de segundo

grado formado con dichas expresiones y coeficientes todos iguales $a + 1$, se obtiene la diferencia de los cubos de dichas expresiones algebraicas.

Este producto notable se obtiene, como todos los anteriores, por multiplicación directa, o bien, observando que se halla en realidad contenido en 64-11. Basta, en efecto, sustituir allí b por $-b$ para obtener 64-12.

Ejemplos.

$$(5 - 3)(5^2 + 5 \cdot 3 + 3^2) = 5^3 - 3^3$$

$$(a - 2b)[a^2 + a(2b) + (2b)^2] = a^3 - 8b^3$$

$$[(x + y) - z][(x + y)^2 + (x + y)z + z^2] = (x + y)^3 - z^3$$

$$(a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) = a^6 - b^6.$$

EJERCICIO 51.

I. Aplicar [64-11] ó [64-12] a los ejemplos siguientes:

$$1^\circ) (2 + 3)(2^2 - 2 \cdot 3 + 3^2)$$

$$2^\circ) (m + n)(m^2 - mn + n^2)$$

$$3^\circ) (a + 2)(a^2 - 2a + 4)$$

$$4^\circ) (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$5^\circ) (3 + b)(9 - 3b + b^2)$$

$$6^\circ) (5a + 2b)(25a^2 - 10ab + 4b^2)$$

$$7^\circ) (p - q)(p^2 + pq + q^2)$$

$$8^\circ) (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$9^\circ) (y - 3)(y^2 + 3y + 9)$$

$$10^\circ) (2 - a)(4 + 2a + a^2)$$

$$11^\circ) (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)$$

$$12^\circ) (x - 5y)(x^2 + 5xy + 25y^2)$$

$$13^\circ) (a^2 + 2)(a^4 - 2a^2 + 4)$$

$$14^\circ) (b^2 - 2)(b^4 + 2b^2 + 4)$$

$$15^\circ) (x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2)$$

$$16^\circ) (a + b^2)(a^2 - ab^2 + b^4)$$

$$17^\circ) (2a^2 + b^2)(4a^4 - 2a^2b^2 + b^4)$$

$$18^\circ) (2x^2 - y^2)(4x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$$

$$19^\circ) (a^3 - b^3)(a^6 + a^3b^3 + b^6)$$

$$20^\circ) [(x + y) + 3][(x + y)^2 - 3(x + y) + 9]$$

II. Compruébese que

$$(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5$$

III. Compruébese que

$$(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = a^5 + b^5$$

IV. Compruébese que

$$(a^4 + b^4)(a^8 - a^4b^4 + b^8) = a^{12} + b^{12}.$$

65. Cocientes notables.

De los productos notables estudiados anteriormente resultan cocientes correspondientes que llamaremos también *notables*. No todos ellos tienen suficiente interés, por lo que nos limitaremos a consignar a continuación los más importantes:

$$65-1 \quad \frac{ma + mb + mc}{m} = a + b + c$$

$$65-2 \quad \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b} = a + b$$

$$65-3 \quad \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a - b} = a - b$$

$$65-4 \quad \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$$

$$65-5 \quad \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

$$65-6 \quad \frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$$

$$65-7 \quad \frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2.$$

He aquí un ejemplo ilustrativo de aplicación de cada uno de los anteriores cocientes notables.

Ejemplos.

$$1. \quad \frac{6x^2 + 9xy - 12xz}{3x} = 2x + 3y - 4z$$

$$2. \quad \frac{x^2 + 6xy + 9y^2}{x + 3y} = x + 3y$$

$$3. \quad \frac{4c^2 - 4cd + d^2}{2c - d} = 2c - d$$

$$4. \quad \frac{m^2 - 9}{m + 3} = m - 3$$

$$5. \frac{16x^2 - y^2}{4x - y} = 4x + y$$

$$6. \frac{m^3 + 8}{m + 2} = m^2 - 2m + 4$$

$$7. \frac{p^3 - 27q^3}{p - 3q} = p^2 + 3pq + 9q^2.$$

EJERCICIO 52.

Escribir los cocientes correspondientes teniendo en cuenta 65-1 á 65-7:

$$1^\circ) \frac{ax - ay + az}{a}$$

$$2^\circ) \frac{ab + bc + b^2}{b}$$

$$3^\circ) \frac{2am - 4bm + 10cm}{2m}$$

$$4^\circ) \frac{x^2yz + xy^2z + xyz^2}{xyz}$$

$$5^\circ) \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$$

$$6^\circ) \frac{a^2 + 10a + 25}{a + 5}$$

$$7^\circ) \frac{x^2 + 12xy + 36y^2}{x + 6y}$$

$$8^\circ) \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{a^2 + b^2}$$

$$9^\circ) \frac{m^2 - 2m + 1}{m - 1}$$

$$10^\circ) \frac{b^2 - 8b + 16}{b - 4}$$

$$11^\circ) \frac{4p^2 - 20pq + 25q^2}{2p - 5q}$$

$$12^\circ) \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{a^2 - b^2}$$

$$13^\circ) \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$14^\circ) \frac{4 - y^2}{2 + y}$$

$$15^\circ) \frac{9a^2 - 4b^2}{3a + 2b}$$

$$16^\circ) \frac{100a^2b^2 - 1}{10ab + 1}$$

$$17^\circ) \frac{a^2 - 16}{a - 4}$$

$$18^\circ) \frac{25 - b^2}{5 - b}$$

$$19^\circ) \frac{49x^2 - 36y^2}{7x - 6y}$$

$$20^\circ) \frac{a^2b^2 - c^2}{ab - c}$$

$$21^\circ) \frac{a^3 + 1}{a + 1}$$

$$22^\circ) \frac{a^3 + 27}{a + 3}$$

$$23^\circ) \frac{8x^3 + y^3}{2x + y}$$

$$24^\circ) \frac{a^3b^3 + c^3}{ab + c}$$

$$25^\circ) \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$26^\circ) \frac{y^3 - 8}{y - 2}$$

$$27^\circ) \frac{125 - x^3}{5 - x}$$

$$28^\circ) \frac{8x^3 - 27y^3}{2x - 3y}$$

$$29^\circ) \frac{x^3 - y^3z^3}{x - yz}$$

$$30^\circ) \frac{(a + b)^3 - c^3}{(a + b) - c}$$

EJERCICIO 53. (REPASO).

I. Hallar los productos siguientes:

$$1^\circ) 3x^2(x - y + z)$$

$$2^\circ) 2a^2(2a + 3b - 2c)$$

$$3^\circ) (a - b)(x + y)$$

$$4^\circ) (m^2 + n^2)(p^2 + q^2)$$

$$5^\circ) (a + 3b)^2$$

$$6^\circ) (x^2 + 2y^2)^2$$

$$7^\circ) (2a - 5b)^2$$

$$8^\circ) (3x^2 - y^2)^2$$

$$9^\circ) (a - b + c)^2$$

$$10^\circ) (2x - 3y + 5z)^2$$

$$11^\circ) (x + 10y)(x - 10y)$$

$$12^\circ) (a^2 - 3b)(a^2 + 3b)$$

$$13^\circ) (x - 8)(x + 6)$$

$$14^\circ) (a + 12)(a - 5)$$

$$15^\circ) (2x + 3)(5x + 1)$$

$$16^\circ) (3x - 2)(4x + 6)$$

$$17^\circ) (2a + b)^3$$

$$18^\circ) (3x + y^2)^3$$

$$19^\circ) (a - 2b)^3$$

$$20^\circ) (x^2 - y^2)^3$$

$$21^\circ) (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$$

$$22^\circ) (3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2)$$

$$23^\circ) (a - 4)(a^2 + 4a + 16)$$

$$24^\circ) (a - 3b)(a^2 + 3ab + 9b^2)$$

II. Hallar los cocientes siguientes:

$$1^\circ) \frac{4a^2 + 6ab + 8ac}{2a}$$

$$2^\circ) \frac{3a^2b^2c^2 - 2abc + ab^2c}{abc}$$

$$3^\circ) \frac{9c^2 + 6cd + d^2}{3c + d}$$

$$4^\circ) \frac{16x^4 + 8x^2y^2 + y^4}{4x^2 + y^2}$$

$$5^\circ) \frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{x - 2y}$$

$$6^\circ) \frac{9p^2 - 24pq + 16q^2}{3p - 4q}$$

$$7^\circ) \frac{a^2 - 64}{a + 8}$$

$$8^\circ) \frac{a^4 - 16}{a^2 + 4}$$

$$9^\circ) \frac{25 - y^2}{5 - y}$$

$$10^\circ) \frac{81 - z^4}{9 - z^2}$$

$$11^{\circ}) \frac{c^3 + 64}{c + 4}$$

$$12^{\circ}) \frac{1 + x^3y^3}{1 + xy}$$

$$13^{\circ}) \frac{216x^3 - 1}{6x - 1}$$

$$14^{\circ}) \frac{x^6 - y^6}{x^2 - y^2}$$

$$15^{\circ}) \frac{(x - y)^3 + z^3}{(x - y) + z}$$

$$16^{\circ}) \frac{(a + b)^3 - (c + d)^3}{(a + b) - (c + d)}$$

TEST 7.

I. Hallar los productos siguientes:

$$1^{\circ}) (2x - 3y)(2x + 3y)$$

$$2^{\circ}) (5x + 4)(2x - 3)$$

$$3^{\circ}) (2x^2 - y^2)^2$$

$$4^{\circ}) (5x - y)(25x^2 + 5xy + y^2)$$

$$5^{\circ}) (3a - 2b + c)^2$$

$$6^{\circ}) (2a + b^2)^3$$

II. Indicar el cociente correcto en los siguientes:

$$1^{\circ}) \frac{4x^2 - y^2}{2x - y}$$

$$a) 2x - y$$

$$b) 2x + y$$

$$c) 4x + y$$

$$2^{\circ}) \frac{x^2 + 10x + 25}{x + 5}$$

$$a) x - 5$$

$$b) x + 20$$

$$c) x + 5$$

$$3^{\circ}) \frac{36a^2 - b^2}{6a + b}$$

$$a) 6a - b$$

$$b) 6a + b$$

$$c) a + 6b$$

$$4^{\circ}) \frac{x^3 - 8y^3}{x - 2y}$$

$$a) x^2 - 2xy + 4y^2$$

$$b) x^2 + 4xy + 4y^2$$

$$c) x^2 + 2xy + 4y^2.$$

CAPÍTULO 8.

DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES.

66. Introducción.

Si dos expresiones algebraicas A y B se multiplican y su producto es C, de cada una de las expresiones algebraicas A y B se dice que es un factor de C.

Por ejemplo, puesto que

$$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$$

diremos que $x + 2$ y $x - 2$ son factores de $x^2 - 4$.

En el Álgebra es a menudo conveniente determinar los factores de una expresión algebraica dada C. La operación que consiste en hallar estos factores (cuando existen) se denomina *factorización* o *descomposición en factores* de la expresión C.

Esta operación es análoga a la división pero, en general, algo más difícil, pues en la división se conoce el producto y uno de los factores, en tanto que en la factorización sólo se conoce el producto, como muestra el esquema siguiente:

Multiplicación: $A \cdot B = ?$

División: $A : (?) = C$

Factorización: $(?)(?) = C$

Sin embargo, en muchos casos se halla un factor por inspección, por tanteo o por el conocimiento de ciertas propiedades; entonces la determinación del otro factor se reduce a la operación de dividir.

En lo que sigue nos ocuparemos de la descomposición en factores de polinomios enteros cuyos coeficientes sean números racionales y buscaremos solamente factores cuyos coeficientes sean también números racionales.

En el problema de la factorización algebraica los factores numéricos son poco importantes y, por tal motivo, el factor F y el cF (en donde $c \neq 0$ es un número) se consideran como equivalentes. Así, por ejemplo, en

$$2x^2 - 6xy = 2x(x - 3y) = -2x(3y - x) = 4x\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y\right)$$

todas las factorizaciones son correctas, pero esencialmente una misma.

Una expresión algebraica puede no tener otros factores que la propia expresión o un factor numérico, en cuyo caso se dice que es *prima*. Si tiene otros factores se dice entonces que es *compuesta*. Estos conceptos son puramente relativos al sistema numérico que se admita para los coeficientes.

Así, por ejemplo, en el sistema de los números racionales la expresión $x^2 - 4$ es compuesta, puesto que se tiene

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

y, en cambio, es prima la expresión $x^2 - 5$.

Sin embargo, en el sistema de los números reales (véase § 3), esta última expresión es compuesta, ya que se puede escribir

$$x^2 - 5 = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}).$$

Admitiremos que todo polinomio compuesto se puede expresar de una sola manera (salvo factores numéricos) como producto de potencias de los factores primos que lo componen*. Por ejemplo,

$$x^2y^3 - 3x^2y^4 = x^2y^3(1 - 3y)$$

en donde x , y y $(1 - 3y)$ son los factores primos distintos de $x^2y^3 - 3x^2y^4$. La propiedad anterior nos asegura que esta expresión no se puede descomponer en factores de otra manera distinta.

Factorizar *completamente* un polinomio es expresarlo como producto de potencias de factores *primos*.

Ejemplo.

Cuando se escribe

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4)$$

* La demostración de esta propiedad se encuentra en libros del Álgebra superior.

el binomio $x^4 - 16$ no está completamente descompuesto en factores, ya que el factor $x^2 - 4$ no es primo sino compuesto. Escribiendo

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

se tiene entonces el binomio $x^4 - 16$ completamente descompuesto en factores.

En lo que sigue, cuando propongamos descomponer en factores una expresión algebraica, se entenderá que se pide descomponerla en factores completamente.

67. Factor común.

Invirtiendo el producto notable 64-1 se tiene

$$ma + mb + mc = m(a + b + c)$$

que nos dice que cuando los términos de un polinomio tienen un factor común m , el polinomio es igual al producto de este factor por el polinomio cuyos términos se obtienen dividiendo por m los términos del polinomio dado.

La operación que consiste en pasar del primer miembro al segundo miembro de la igualdad escrita arriba se llama sacar factor común.

Ejemplos.

$$2x^2 + 4xy + 6xz = 2x(x + 2y + 3z)$$

$$ac^2 - cx^2 + cy = c(ac - x^2 + y)$$

$$a^2b^2c^2 - a^3b^2c^3 - a^2b^3c = a^2b^2c(c - ac^2 - b)$$

$$6x^2y + 3xy - 9xy^2 = 3xy(2x + 1 - 3y)$$

$$(x + y)a + (x + y)b + (x + y)c = (x + y)(a + b + c).$$

En el primero de los ejemplos anteriores $m = 2x$; en el último ejemplo es $m = x + y$.

EJERCICIO 54.

Descomponer en factores:

1º) $a^2 - 2a$

3º) $6x^2 - 3x$

5º) $a^2 + ab^2$

7º) $x^2y^2 - xy^3$

2º) $x^2 + x$

4º) $ay - by$

6º) $x^3 + 5x$

8º) $2x^3 - 4x^2 + 4x$

- 9º) $x^3 + x^2 + 2x$ 10º) $a^3 - 3a^2 + a$
 11º) $5p^2q - 10pq^2 + 5p^2q^2$ 12º) $2b^3 - 8b^2 + 4b$
 13º) $x^4 - x^3y + x^2y^2$ 14º) $8ab^2 - 4a^2b + 4a^2b^2$
 15º) $pqr - p^2qr + pqr^2$ 16º) $24x^2 + 16x^4 + 40x^3$
 17º) $a^4bx^2 + 2a^3b^3x^3 - a^2b^4x^3$ 18º) $t^4 + 3a^2 - t^6$
 19º) $x^5 - x^3 + x^2$ 20º) $x^2y^3z^4 - 2xy^2z^2 + 3y^2z^3$
 21º) $7m^2n^3 + 14m^3n^2 - 21m^3n^4$ 22º) $9a^4 - 6a^2x + 3a^3x^2$
 23º) $a^2 - a^4 + a^6 - a^8$ 24º) $4a^6b^2c^4 + 8a^5b^3c^4 + 12a^6b^4c^3$
 25º) $(a+b)x + (a+b)y$ 26º) $(m+n)x - (m+n)y$
 27º) $(a+b)x + (a+b)y - (a+b)z$
 28º) $(a+3)x^2 + (a+3)y^2$
 29º) $(x-y)a^2 + (x-y)b^2 + (x-y)c^2$
 30º) $(a+b+c)x + (a+b+c)y.$

68. Agrupamiento.

En algunas expresiones los términos pueden ser agrupados de tal manera que factorizando cada grupo quede un factor común complejo en la expresión; se termina entonces la factorización sacando este factor común en la forma estudiada en el apartado anterior. (Véanse el último ejemplo ilustrativo de § 67 y los problemas 25 a 30 del Ejercicio 54).

Así, por ejemplo, si la expresión dada es de la forma

$$ac + bc + ad + bd,$$

y se agrupa el primer término con el segundo y el tercero con el cuarto, se tiene

$$(ac + bc) + (ad + bd),$$

y sacando factor común en cada grupo:

$$c(a + b) + d(a + b)$$

Como ahora la expresión contiene el factor común $(a + b)$, sacando este factor se obtiene finalmente

$$(a + b)(c + d).$$

(Compárese con 64-2).

Otros ejemplos.

$$\begin{aligned} 1. \quad x^3 + 3x^2 + 2x + 6 &= (x^3 + 3x^2) + (2x + 6) \\ &= x^2(x + 3) + 2(x + 3) \\ &= (x + 3)(x^2 + 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad x^2 + xy - bx - by &= (x^2 + xy) - (bx + by) \\ &= x(x + y) - b(x + y) \\ &= (x + y)(x - b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad 2a^4 - 2a^3 - a + 1 &= (2a^4 - 2a^3) - (a - 1) \\ &= 2a^3(a - 1) - 1(a - 1) \\ &= (a - 1)(2a^3 - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad 2ax - by - ay + 2bx &= (2ax - ay) + (2bx - by) \\ &= a(2x - y) + b(2x - y) \\ &= (2x - y)(a + b). \end{aligned}$$

Este último ejemplo muestra que a veces conviene agrupar el primer término con el tercero (y el segundo con el cuarto) en vez de agrupar el primero con el segundo, como se hizo en los ejemplos anteriores. En algunos casos resultará conveniente agrupar el primer término con el cuarto y el segundo con el tercero.

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación del método de agrupación a la descomposición en factores de una expresión de más de cuatro términos.

$$\begin{aligned} 5. \quad ax + bx + cx - ay - by - cy \\ &= (ax + bx + cx) - (ay + by + cy) \\ &= x(a + b + c) - y(a + b + c) \\ &= (a + b + c)(x - y). \end{aligned}$$

De otro modo:

$$\begin{aligned} ax + bx + cx - ay - by - cy \\ &= (ax - ay) + (bx - by) + (cx - cy) \\ &= a(x - y) + b(x - y) + c(x - y) \\ &= (x - y)(a + b + c). \end{aligned}$$

EJERCICIO 55.

Descomponer en factores:

- | | |
|--|--|
| 1º) $ax + bx + ay + by$ | 2º) $am - bm + an - bn$ |
| 3º) $ap - bp - aq + bq$ | 4º) $ax - my - ay + mx$ |
| 5º) $x^2 + xz - bx - bz$ | 6º) $y^2 + ay - by - ab$ |
| 7º) $x^2 - xy - 4x + 4y$ | 8º) $3xy - 2xz - 3ay + 2az$ |
| 9º) $ac + 2bc - ad - 2bd$ | 10º) $ux + vy - vx - uy$ |
| 11º) $3ax - 3ay - 5bx + 5by$ | 12º) $-2ax - 2ay - abx - aby$ |
| 13º) $am + 6bn + 3bm + 2an$ | 14º) $ab - 3bm - 2am + 6m^2$ |
| 15º) $x^3 + x - ax^2 - a$ | 16º) $x^3 + 2x^2 + 4x + 8$ |
| 17º) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6$ | 18º) $x^3 - 4x^2 - 5x + 20$ |
| 19º) $2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 9x$ | 20º) $az^4 + bz^3 - 2az - 2b$ |
| 21º) $m^2 - m^3 + 1 - m$ | 22º) $a^2b + ac^2 - abd - c^2d$ |
| 23º) $2xy - yz + 6x^2 - 3xz$ | 24º) $abx^2 + ab^2c - x^2cy - bc^2y$ |
| 25º) $3a^2 - 7b^2 - 9a^3 + 21ab^2$ | 26º) $1 + x - x^2yz - x^3yz$ |
| 27º) $ax + bx + ay + by + az + bz$ | 28º) $ax - bx + cx + ay^2 - by^2 + cy^2$ |
| 29º) $3am + 2bm - m^2 - 6an - 4bn + 2mn$ | |
| 30º) $ax + ay + a - x - y - 1$ | |

69. Trinomios cuadrados perfectos.

En virtud de 64-3 y 64-4 se tiene

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Según esto, un trinomio es un cuadrado perfecto (igual al cuadrado de un binomio), cuando dos de sus términos son cuadrados perfectos y el tercero es el doble producto de las raíces cuadradas de dichos términos. El trinomio es el cuadrado de una suma o de una diferencia según que el signo del doble producto sea positivo o negativo.

Así, por ejemplo, el trinomio

$$25x^2 - 20xz + 4z^2$$

es un cuadrado perfecto, pues contiene dos términos cuadrados

perfectos * $25x^2$ y $4z^2$. Las raíces cuadradas, (positivas), de estos términos son $5x$ y $2z$, y su doble producto es

$$2(5x)(2z) = 20xz,$$

el cual coincide con el término medio del trinomio (exceptuando el signo). Como dicho término medio tiene signo negativo, resulta

$$25x^2 - 20xz + 4z^2 = (5x - 2z)^2.$$

Observaremos que para sacar la raíz cuadrada (positiva) de un monomio basta sacar la raíz cuadrada aritmética de su coeficiente y dividir por 2 los exponentes de los factores literales que contenga.

Así, la raíz cuadrada de

$$49a^2 \quad \text{es} \quad 7a$$

y la de

$$64a^4b^6 \quad \text{es} \quad 8a^2b^3.$$

$$\text{Comprobación: } (7a)^2 = 7a \cdot 7a = 49a^2$$

$$(8a^2b^3)^2 = 8a^2b^3 \cdot 8a^2b^3 = 64a^4b^6.$$

Nótese que $-7a$ es también raíz cuadrada de $49a^2$ ya que $(-7a)^2 = 49a^2$. En general, todo monomio cuadrado perfecto tiene dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa. Pero en la descomposición en factores de un trinomio cuadrado perfecto basta considerar los valores positivos, pues los negativos conducen a descomposiciones equivalentes.

Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} 9a^2 + 6ab + b^2 &= (3a + b)^2 = (3a + b)(3a + b) \\ &= (-3a - b)^2 = (-3a - b)(-3a - b). \end{aligned}$$

Otros ejemplos.

$$1. \quad 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

$$2. \quad a^6 - 22a^3 + 121 = (a^3 - 11)^2$$

$$\begin{aligned} 3. \quad (x - y)^2 + 4(x - y)z + 4z^2 &= [(x - y) + 2z]^2 \\ &= (x - y + 2z)^2. \end{aligned}$$

EJERCICIO 56.

Descomponer en factores:

$$1^\circ) \quad 9a^2 + 6ab + b^2$$

$$2^\circ) \quad a^2 - 4ab + 4b^2$$

$$3^\circ) \quad x^2 + 8xy + 16y^2$$

$$4^\circ) \quad x^2 - 10xz + 25z^2$$

* Nótese que el signo de estos términos ha de ser siempre positivo.

- 5º) $4a^2 - 12ac + 9a^2$ 6º) $a^2 - 2a + 1$
 7º) $b^2 + 2b + 1$ 8º) $x^2 - 14x + 49$
 9º) $25 - 10y + y^2$ 10º) $100x^2 + 20x + 1$
 11º) $81a^2 - 90ab + 25b^2$ 12º) $64 - 48z + 9z^2$
 13º) $121a^2 + 88ax + 16x^2$ 14º) $1 - 12m + 36m^2$
 15º) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ 16º) $a^2 - 0,5a + 0,0625$
 17º) $x^2y^2 - 4xyz + 4z^2$ 18º) $4a^2 + 28abc + 49b^2c^2$
 19º) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ 20º) $a^4 - 10a^2b^2 + 25b^4$
 21º) $a^6 + 6a^3 + 9$ 22º) $a^6 - 4a^3x^3 + 4x^6$
 23º) $z^8 + 2z^4 + 1$ 24º) $a^4b^6 - 2a^2b^3c + c^2$
 25º) $4a^4 - 36a^2b^2 + 81b^4$ 26º) $0,01 - 0,2x^2 + x^4$
 27º) $(a+b)^2 - 2(a+b)c + c^2$ 28º) $(x+y)^2 + 6(x+y) + 9$
 29º) $16 - 8(x-z) + (x-z)^2$
 30º) $(a+b)^2 + 2(a+b)(c+d) + (c+d)^2$

70. Diferencia de dos cuadrados.

Invirtiendo el producto notable 64-6 se tiene:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Por tanto, la diferencia de dos cuadrados se descompone en el producto de la suma por la diferencia de las bases de estos cuadrados.

Ejemplos.

$$85^2 - 15^2 = (85 + 15)(85 - 15) = 100 \times 70 = 7\,000$$

$$9x^2 - 16 = (3x + 4)(3x - 4)$$

$$100a^2b^2 - 49c^2 = (10ab + 7c)(10ab - 7c)$$

$$x^4 - \frac{1}{4} = \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

Las bases de los cuadrados pueden ser también expresiones complejas.

Ejemplos.

$$(x + y)^2 - z^2 = (x + y + z)(x + y - z)$$

$$\begin{aligned}
 9a^2 - (2b - 3c)^2 &= [3a + (2b - 3c)][3a - (2b - 3c)] \\
 &= (3a + 2b - 3c)(3a - 2b + 3c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a - b)^2 - (c - d)^2 &= [(a - b) + (c - d)][(a - b) - (c - d)] \\
 &= (a - b + c - d)(a - b - c + d)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2x + y - 3z)^2 - (x - y + 2z)^2 &= (2x + y - 3z + x - y + 2z)(2x + y - 3z - x + y - 2z) \\
 &= (3x - z)(x + 2y - 5z).
 \end{aligned}$$

Sucede en algunos ejemplos que uno de los factores obtenidos al aplicar el método anterior es también una diferencia de cuadrados. Se procede entonces a descomponerlo a su vez en factores siguiendo el mismo método.

Ejemplos.

$$\begin{aligned}
 x^4 - 1 &= (x^2 + 1)(x^2 - 1) \\
 &= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^8 - b^8 &= (a^4 + b^4)(a^4 - b^4) \\
 &= (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \\
 &= (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (x + y)^4 - 16 &= [(x + y)^2 + 4][(x + y)^2 - 4] \\
 &= [(x + y)^2 + 4][x + y + 2][x + y - 2].
 \end{aligned}$$

EJERCICIO 57.

Descomponer en factores:

1º) $80^2 - 20^2$

3º) $b^2 - 1$

5º) $4a^2 - 9c^2$

7º) $16 - 81a^2$

9º) $x^2 - 0,25$

11º) $a^2b^2 - 9x^2$

13º) $a^6 - b^4$

15º) $400a^4 - b^2$

17º) $121m^6 - 900n^{12}$

19º) $4x^2y^2z^2 - b^8$

21º) $a^4 - x^4$

23º) $16 - b^4$

2º) $a^2 - 4b^2$

4º) $9x^2 - y^2$

6º) $4x^2 - 25y^2$

8º) $100 - 36x^2$

10º) $a^2 - 0,0001b^2$

12º) $4a^4 - b^2c^2$

14º) $x^8 - 49y^6$

16º) $4x^8 - y^{10}$

18º) $64x^{14} - 0,36a^{10}$

20º) $144x^2y^4 - z^6$

22º) $(a + b)^2 - c^2$

24º) $(a - b)^2 - c^2$

25º) $1 - x^8$

26º) $x^2 - (y + z)^2$

27º) $a^8 - 256$

28º) $x^2 y^2 - (a - z)^2$

29º) $a^{16} - 1$

30º) $(2x - y)^2 - z^2$

31º) $x^4 - y^3$

32º) $(x + y)^2 - (a - b)^2$

33º) $a^{12} - 81$

34º) $(a - 2b)^2 - (2a + b)^2$

35º) $(x + y)^4 - 1$

36º) $(2a + 1)^2 - (a + 2)^2$

37º) $(x - 2)^2 - (a + x - 3)^2$

38º) $(x - y + z)^2 - (x + y - z)^2$

39º) $(2a + 2b - c)^2 - (a - b + 3c)^2$

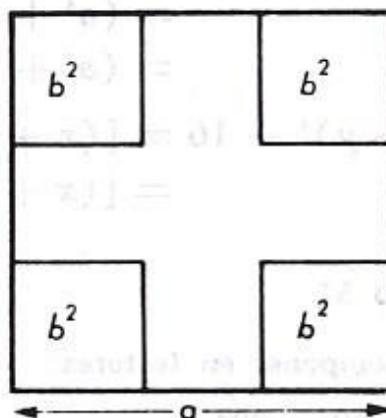
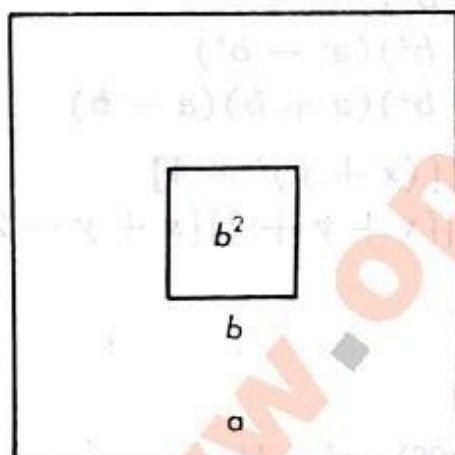
40º) $(a^2 - a + 1)^2 - (a^2 + a + 1)^2$

41º) En la figura de la izquierda se tiene

$$a = 7,7 \text{ cm} \quad y \quad b = 2,3 \text{ cm}.$$

Hallar el área comprendida entre los dos cuadrados evaluando: 1) la expresión $a^2 - b^2$; 2) la expresión $(a + b)(a - b)$.

42º) Hallar el área que queda de un cuadrado de lado $a = 7,5 \text{ m}$ al cual se le ha cortado en cada esquina un cuadrado de lado $b = 2,25 \text{ m}$ (figura de la derecha).



71. Combinación de cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados.

Algunos polinomios pueden ser expresados como diferencia de cuadrados si se agrupan convenientemente los términos que formen cuadrados perfectos. Entonces se descomponen en factores como en el parágrafo 70.

Ejemplos.

$$\begin{aligned}
 1. \quad a^2 + 2ab + b^2 - 25m^2 &= (a^2 + 2ab + b^2) - 25m^2 \\
 &= (a + b)^2 - 25m^2 \\
 &= (a + b + 5m)(a + b - 5m).
 \end{aligned}$$

$$2. \quad a^2 - x^2 - y^2 + 2xy = a^2 - (x^2 - 2xy + y^2)$$

$$= a^2 - (x - y)^2$$

$$= (a + x - y)(a - x + y).$$

$$3. \quad 4a^2 - c^2 - 6cd + b^2 - 9d^2 - 4ab$$

$$= (4a^2 - 4ab + b^2) - (c^2 + 6cd + 9d^2)$$

$$= (2a - b)^2 - (c + 3d)^2$$

$$= (2a - b + c + 3d)(2a - b - c - 3d)$$

EJERCICIO 58.

Descomponer en factores:

$$1^\circ) \quad a^2 - 2ab + b^2 - 4x^2$$

$$2^\circ) \quad x^2 + 2xy + y^2 - a^2$$

$$3^\circ) \quad x^2 + y^2 - z^2 - 2xy$$

$$4^\circ) \quad 4a^2 - 4ab + b^2 - c^2$$

$$5^\circ) \quad 9a^2 - 4c^2 + 6ab + b^2$$

$$6^\circ) \quad 4x^2 - 12xy - 16a^2 + 9y^2$$

$$7^\circ) \quad a^2 - b^2 - 2bc - c^2$$

$$8^\circ) \quad x^2 + 2yz - z^2 - z^2$$

$$9^\circ) \quad 1 - a^2 - 4ax - 4x^2$$

$$10^\circ) \quad 25 - m^2 - n^2 + 2mn$$

$$11^\circ) \quad 6xy - 9x^2 - y^2 + z^2$$

$$12^\circ) \quad 30ab - 25a^2 + 4c^2 - 9b^2$$

$$13^\circ) \quad 100x^2 - y^2 - 14yz - 49z^2$$

$$14^\circ) \quad 48ax - 36a^2 + y^2 - 16x^2$$

$$15^\circ) \quad a^2 + b^2 - 2ab + 2cd - c^2 - d^2$$

$$16^\circ) \quad x^2 - y^2 + z^2 - t^2 - 2xz - 2yt$$

$$17^\circ) \quad 4a^2 - 4b^2 + c^2 - 4ac + 4b - 1$$

$$18^\circ) \quad 9 - 6a - b^2 + a^2 - 10bc - 25c^2$$

$$19^\circ) \quad 25a^2 - 16y^2 + 9x^2 + 30ax - z^2 - 8yz$$

$$20^\circ) \quad 4a^2 + 9m^2 - 20bc - 12am - 4c^2 - 25b^2$$

$$21^\circ) \quad x^2 - y^2 - 2x - z^2 + 1 - 2yz$$

$$22^\circ) \quad 6ax - 4y^2 + a^2 + 9x^2 - y^4 - 4$$

$$23^\circ) \quad 1 - 2x^2 + x^4 - 4y^2 - 12yz - 9z^2$$

$$24^\circ) \quad 25x^4 + 12x^3 + 10a^2x^2 - 9x^6 + a^4 - 4$$

$$25^\circ) \quad x^2y^2 - z^4 - 2xy + 1 - 4z^2b^2 - 4b^4$$

$$26^\circ) \quad x^2 - 2xz - 1 - y^2 + 2y + z^2$$

$$27^\circ) \quad x^4 + y^4 - a^4 - b^4 - 2(x^2y^2 + a^2b^2)$$

$$28^\circ) \quad 9a^4 - 8a^3 + 6a^2b^2 - 16a^6 - 1 + b^4$$

$$29^\circ) \quad 4xy - 4 - a^2 - 4a + x^2 + 4y^2$$

$$30^\circ) \quad 2a^3x^3 - x^6 - a^6 + 2b^3y^3 + b^6 + y^6.$$

72. Cuadrados perfectos incompletos.

Llamaremos así a los polinomios que pueden ser convertidos en cuadrados perfectos mediante la adición de un término conveniente. Para que la expresión considerada no se altere es preciso restar a continuación el término agregado. Si este término es a su vez un cuadrado perfecto, la expresión se puede escribir como diferencia de dos cuadrados y, por consiguiente, será factorizable por el método del parágrafo 71.

Ejemplos.

1. El trinomio

$$a^4 + a^2 + 1$$

no es un cuadrado perfecto. Para que lo fuese el término del medio debería ser $2a^2$. Sumando y restando a^2 se tiene

$$\begin{aligned} a^4 + 2a^2 + 1 - a^2 &= (a^2 + 1)^2 - a^2 = \\ &= (a^2 + 1 + a)(a^2 + 1 - a) \end{aligned}$$

$$2. \quad x^4 - 12x^2y^2 + 4y^4.$$

Para que este trinomio sea cuadrado perfecto se necesita que el término medio sea $-4x^2y^2$, o bien, $+4x^2y^2$. Se puede lograr que el término medio sea $-4x^2y^2$ sumando $+8x^2y^2$; y que sea $+4x^2y^2$ sumando $+16x^2y^2$. Esto último resulta más conveniente para nuestro propósito puesto que entonces el término agregado (que debe restarse después) es cuadrado perfecto.

Se tiene así,

$$\begin{aligned} x^4 - 12x^2y^2 + 4y^4 &= (x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4) - 16x^2y^2 = \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - 16x^2y^2 = \\ &= (x^2 + 2y^2 + 4xy)(x^2 + 2y^2 - 4xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad x^4 + 4 &= x^4 + 0 \cdot x^2 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = \\ &= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = \\ &= (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x) \end{aligned}$$

Puesto que

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

deduce que

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab;$$

es decir: una suma de cuadrados podrá transformarse en una diferencia de cuadrados y, por tanto, descomponerse en factores, siempre que el término $2ab$ resulte un cuadrado perfecto.

Así, en el ejemplo anterior $x^4 + 4$, se tiene $a = x^2$, $b = 2$ y como $2ab = 4x^2$ es un cuadrado perfecto, la factorización es posible.

$$4. \quad x^4 - 2x^2yz - y^4 - y^2z^2 - z^4$$

Esta expresión contiene dos cuadrados perfectos incompletos, como se ve escribiéndola en la forma

$$(x^4 - 2x^2yz + \quad) - (y^4 + y^2z^2 + z^4).$$

Agregando y^2z^2 en cada paréntesis (lo cual equivale a sumar y restar y^2z^2) resulta

$$\begin{aligned} (x^4 - 2x^2yz + y^2z^2) - (y^4 + 2y^2z^2 + z^4) &= \\ &= (x^2 - yz)^2 - (y^2 + z^2)^2 = \\ &= (x^2 - yz + y^2 + z^2)(x^2 - yz - y^2 - z^2). \end{aligned}$$

EJERCICIO 59.

Descomponer en factores:

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1º) $1 + x^2 + x^4$ | 2º) $a^4 + a^2b^2 + b^4$ |
| 3º) $x^4 + 2x^2y^2 + 9y^4$ | 4º) $25x^4 + x^2y^2 + y^4$ |
| 5º) $16a^4 + 8a^2b^2 + 9b^4$ | 6º) $9a^4 - 21a^2b^2 + 4b^4$ |
| 7º) $9x^4 + 26x^2 + 25$ | 8º) $m^4 - 17m^2 + 16$ |
| 9º) $a^4 - 7a^2b^2 + b^4$ | 10º) $x^4 - 19x^2y^2 + 9y^4$ |
| 11º) $4 + a^4$ | 12º) $x^4 + 64$ |
| 13º) $64x^4 + y^8$ | 14º) $b^4 + 1024$ |
| 15º) $100x^4 + 59x^2y^2 + 49y^4$ | 16º) $36a^4 - 69a^2b^2 + 25b^4$ |
| 17º) $a^4 + 31a^2x^2 + 400x^4$ | 18º) $a^4 - 21a^2b^2 + 4b^4$ |
| 19º) $a^4 - b^4 - c^4 - 2a^2bc - b^2c^2$ | 20º) $1 + 2xy - x^2y^2 - x^4 - y^4$ |

73. Trinomios de la forma $x^2 + px + q$.

En § 64-7 vimos que

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Por tanto, si podemos encontrar dos números a y b cuya suma algebraica sea p y cuyo producto sea q , esto es, tales que

$a + b = p$ y $ab = q$
se tendrá

$$x^2 + px + q = x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b).$$

Ejemplos.

1. $x^2 + 5x + 6$

Escribiremos

$$x^2 + 5x + 6 = (x \quad) (x \quad)$$

y buscaremos dos números cuya suma sea $+5$ y cuyo producto sea $+6$. Como estos números son evidentemente $+2$ y $+3$, tendremos:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3).$$

2. $x^2 - 7x + 12$

En este caso tenemos que determinar dos números cuya suma sea -7 y cuyo producto sea $+12$. Tales números son -3 y -4 . Por tanto:

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4).$$

3. $x^2 + 3x - 10$

Hay que hallar dos números cuya suma sea $+3$ y cuyo producto sea -10 . Obsérvese que siendo el producto negativo, los factores han de tener signos contrarios. Además, el mayor ha de ser positivo, puesto que la suma de ambos es $+3$. Los números buscados son $+5$ y -2 . Por tanto,

$$x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2).$$

4. $x^2 - 5x - 24$

En este ejemplo hay que buscar dos números cuya suma sea -5 y cuyo producto sea -24 . Como los factores de -24 son

$$+1 \text{ y } -24 \quad \text{ó} \quad -1 \text{ y } +24$$

$$+2 \text{ y } -12 \quad \text{ó} \quad -2 \text{ y } +12$$

$$+3 \text{ y } -8 \quad \text{ó} \quad -3 \text{ y } +8$$

$$+4 \text{ y } -6 \quad \text{ó} \quad -4 \text{ y } +6$$

entre ellos hay que escoger la pareja cuya suma algebraica sea -5 . Por eliminación sucesiva se obtiene $+3$ y -8 . Nótese que siendo la suma negativa, el número de mayor valor absoluto ha de ser negativo.

Por tanto, resulta

$$x^2 - 5x - 24 = (x + 3)(x - 8).$$

$$5. \quad x^2 - 8xy + 15y^2.$$

Escrito este trinomio en la forma $x^2 - (8y)x + 15y^2$ se nota que el problema se reduce a hallar dos monomios cuyo producto sea $15y^2$ y cuya suma sea $-8y$. Estos monomios son $-3y$ y $-5y$. Por tanto:

$$x^2 - 8xy + 15y^2 = (x - 3y)(x - 5y).$$

Compruébese efectuando la multiplicación indicada en el segundo miembro.

No siempre existen dos números racionales cuya suma y producto sean dos números dados. Más adelante (en § 79) daremos un método para reconocer si un trinomio es descomponible en factores (con coeficientes racionales), e indicaremos también un método general para efectuar esta descomposición (cuando ella es posible).

EJERCICIO 60.

Descomponer en factores:

$$1^\circ) \quad x^2 + 7x + 12$$

$$2^\circ) \quad x^2 + 8x + 15$$

$$3^\circ) \quad x^2 + 9x + 20$$

$$4^\circ) \quad x^2 + 7x + 10$$

$$5^\circ) \quad x^2 - 5x + 6$$

$$6^\circ) \quad x^2 - 9x + 20$$

$$7^\circ) \quad a^2 - 3a + 2$$

$$8^\circ) \quad a^2 - 6a + 5$$

$$9^\circ) \quad b^2 + 3b - 10$$

$$10^\circ) \quad b^2 + 4b - 5$$

$$11^\circ) \quad y^2 + 3y - 18$$

$$12^\circ) \quad z^2 + 3z - 4$$

$$13^\circ) \quad x^2 - x - 6$$

$$14^\circ) \quad x^2 - 2x - 15$$

$$15^\circ) \quad a^2 - 5a - 14$$

$$16^\circ) \quad a^2 - 2a - 24$$

$$17^\circ) \quad c^2 + 9c + 8$$

$$18^\circ) \quad c^2 - 9c + 8$$

$$19^\circ) \quad x^2 - 5x - 36$$

$$20^\circ) \quad x^2 + 9x - 22$$

$$21^\circ) \quad a^2 - 15a + 36$$

$$22^\circ) \quad a^2 + 19a + 60$$

$$23^\circ) \quad m^2 + 13m - 90$$

$$24^\circ) \quad c^2 - 7c - 120$$

$$25^\circ) \quad x^2 - 7xy + 10y^2$$

$$26^\circ) \quad x^2 + 7xy + 12y^2$$

$$27^\circ) \quad a^2 + 4ab - 21b^2$$

$$28^\circ) \quad a^2 - 2ab - 48b^2$$

29º) $a^2 - 20ax + 51x^2$

30º) $y^2 + 10yz - 75z^2$

31º) $a^4 - 11a^2 + 24$

32º) $x^4 - 8x^2 - 33$

33º) $a^2b^2 + 16ab - 36$

34º) $a^2b^2 - 6abc - 72c^2$

35º) $x^2 - 0,8x + 0,15$

36º) $a^2 + 0,29a + 0,01$

37º) $a^2x^2 + 5ax - 36$

38º) $a^2x^2 - 6axy - 40y^2$

39º) $c^6 - 20c^3 + 64$

40º) $a^4 - 5a^2 + 4$

41º) $x^4 - 28x^2 + 115$

42º) $x^4 - 23x^2 - 108$

43º) $a^4 + 14a^2b - 120b^2$

44º) $x^2 + 35xy^2 + 150y^4$

45º) $a^2b^2 - 48abc - 100c^2$

46º) $y^2 - \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}$

47º) $x^4 - 20x^2y^2 - 96y^4$

48º) $a^6 - 3a^3b - 180b^2$

49º) $x^{2n} - 19x^n - 120$

50º) $a^{2n} + 40a^n + 144$

74. Trinomios de la forma $mx^2 + px + q$.

Primer método. En virtud de § 64-8 se tiene

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd.$$

Por tanto, si es posible determinar números a, b, c, d tales que

$$ac = m, \quad bd = q, \quad ad + bc = p$$

se tendrá

$$mx^2 + px + q = (ax + b)(cx + d).$$

Cuando los coeficientes m y q contienen pocos factores la determinación de los números a, b, c, d no requiere muchos tanteos y el método es de valor práctico. Es claro que a y c han de ser factores de m y b y d factores de q .

Conviene disponer los números que se ensayan en forma de cuadro, como muestra el esquema siguiente:

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \times & \\ c & d \\ \hline ac & bd \\ ad + bc & \end{array}$$

Ejemplo: $5x^2 - 8x + 3$

$$\begin{array}{rcl} a = 5 & \times & 3 = b \\ c = 1 & & 1 = d \\ \hline ac = 5 & & 3 = bd \end{array}$$

$$ad + bc = 5 + 3 = 8$$

$$\begin{array}{rcl} a = 5 & \times & -3 = b \\ c = 1 & & -1 = d \\ \hline ac = 5 & & 3 = bd \end{array}$$

$$ad + bc = -5 - 3 = -8$$

Los números ensayados a la izquierda no convienen porque la suma de los productos cruzados es 8 (en vez de -8). Los números ensayados a la derecha representan la combinación apropiada. Puesto que hay un coeficiente negativo en el trinomio dado, de entrada podía haberse desechado la primera combinación (con números todos positivos). Por tanto:

$$5x^2 - 8x + 3 = (5x - 3)(x - 1).$$

Segundo método. Cuando los coeficientes m y q contienen muchos factores el método anterior se vuelve muy laborioso. Puede ensayarse entonces el procedimiento siguiente: se separa el término medio en dos sumandos de modo que el polinomio resultante pueda descomponerse por agrupamiento (68).

Ejemplo.

$$\begin{aligned} 8x^2 - 37x - 15 &= 8x^2 - 40x + 3x - 15 = \\ &= 8x(x - 5) + 3(x - 5) = \\ &= (x - 5)(8x + 3). \end{aligned}$$

Para hallar los términos en que conviene descomponer el término medio, se forma el producto mq y se buscan dos números que multiplicados den mq y que sumados algebraicamente den p . Así, en el ejemplo anterior se tiene $mq = 8(-15) = -120$ y $p = -37$. Los números que multiplicados dan -120 y sumados dan -37 son -40 y 3 . Por tanto, el término medio $-37x$ se escribe en la forma $-40x + 3x$. Esencialmente, la misma determinación exige el método que se estudia a continuación.

Tercer método. Se puede usar también el procedimiento siguiente: se multiplica y divide el trinomio dado por m (coeficiente de x^2), con lo que se obtiene

$$\frac{(mx)^2 + p(mx) + mq}{m}$$

y considerando mx como un solo símbolo se procede a descomponer el numerador por el método explicado en § 73, es decir, buscando dos números que multiplicados den mq y que sumados den p .

Ejemplos.

$$\begin{aligned}
 1. \quad 4x^2 + 8x + 3 &= \frac{(4x)^2 + 8(4x) + 12}{4} = \\
 &= \frac{(4x + 6)(4x + 2)}{4} = \\
 &= \frac{2(2x + 3)2(2x + 1)}{4} = \\
 &= (2x + 3)(2x + 1).
 \end{aligned}$$

En el primer paso se multiplica y divide el trinomio por 4. En el segundo, se procede a la descomposición en factores para lo cual se buscan los números que sumados den 8 y que multiplicados den 12. El factor 4 que se introdujo en el numerador aparece ahora repartido entre los factores. Sacando 2 factor común y simplificando se obtiene $(2x + 3)(2x + 1)$.

$$\begin{aligned}
 2. \quad 6x^2 - 7xy - 3y^2 &= \frac{(6x)^2 - 7(6x)y - 18y^2}{6} = \\
 &= \frac{(6x - 9y)(6x + 2y)}{6} = \\
 &= \frac{3(2x - 3y)2(3x + y)}{6} = \\
 &= (2x - 3y)(3x + y).
 \end{aligned}$$

EJERCICIO 61.

Descomponer en factores:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1º) $2x^2 + 3x + 1$ | 2º) $2x^2 + 5x + 2$ |
| 3º) $2x^2 + 7x + 3$ | 4º) $3x^2 + 5x + 2$ |
| 5º) $4a^2 + 13a + 3$ | 6º) $2a^2 - 7a + 3$ |
| 7º) $2b^2 - 7b + 6$ | 8º) $6x^2 - 7x + 2$ |
| 9º) $6a^2 - 13a + 6$ | 10º) $4a^2 - 12a + 5$ |
| 11º) $4x^2 - 16x + 15$ | 12º) $2b^2 - 11b + 12$ |

13º) $6a^2 - 19a + 10$

15º) $4x^2 + 4x - 3$

17º) $2a^2 + 5a - 12$

19º) $6a^2 + 5a - 4$

21º) $6x^2 - 11x - 10$

23º) $4b^2 - 16b + 15$

25º) $6x^2 - 5x - 21$

27º) $6x^2 - 25x - 25$

29º) $4x^2 + 23x - 35$

31º) $6x^2 - 7ax - 3a^2$

33º) $9a^2 + 6ab - 8b^2$

35º) $10x^2 - 23xy - 5y^2$

37º) $31xy - 5x^2 - 6y^2$

39º) $15a^2 + 8x^2 - 26ax$

14º) $24x^2 - 38x + 15$

16º) $4x^2 - 4x - 3$

18º) $12b^2 - b - 1$

20º) $2x^2 + 5x - 3$

22º) $4a^2 + 19a - 5$

24º) $2x^2 - 3x - 9$

26º) $6x^2y^2 + xy - 1$

28º) $8y^2 - 37y - 15$

30º) $6x^2 + 49x - 45$

32º) $2a^2 - 13ab + 6b^2$

34º) $8x^2 + 6xy - 35y^2$

36º) $10y^2 - 21yz - 10z^2$

38º) $2ab - 24a^2 + 15b^2$

40º) $30x^2 - 7xy - 15y^2$

75. Suma de potencias de exponente impar.**75-1. Suma de dos cubos.**

En § 64-11 vimos que

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

Por consiguiente,

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Ejemplos.

1. $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$

2. $8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 =$
 $= (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2).$

3. $x^3 + y^9 = x^3 + (y^3)^3 = (x + y^3)(x^2 - xy^3 + y^6).$

75-2. Suma de dos potencias cualesquiera con el mismo exponente impar.

Invirtiendo el ejemplo III del Ejercicio 51, se tiene

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4);$$

y, análogamente, se comprueba que

$$a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6).$$

En general, se tiene

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$$

siempre que n sea un entero positivo impar. Es decir:

La suma de dos potencias con el mismo exponente n impar se descompone en la suma de las bases por un polinomio homogéneo de grado $n - 1$ con coeficientes $+1$ y -1 alternativamente.

Ejemplos.

$$\begin{aligned} 1. \quad x^5 + 32 &= x^5 + 2^5 = \\ &= (x + 2)(x^4 - x^3 \cdot 2 + x^2 \cdot 2^2 - x \cdot 2^3 + 2^4) = \\ &= (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad 243x^5 + 1 &= (3x)^5 + 1 = \\ &= (3x + 1)(81x^4 - 27x^3 + 9x^2 - 3x + 1). \end{aligned}$$

EJERCICIO 62.

Descomponer en factores:

$$1^\circ) \quad x^3 + y^3$$

$$2^\circ) \quad a^3b^3 + c^3$$

$$3^\circ) \quad 1 + b^3$$

$$4^\circ) \quad x^3 + 8$$

$$5^\circ) \quad a^3 + 125$$

$$6^\circ) \quad 27x^3 + 1$$

$$7^\circ) \quad x^5 + y^5$$

$$8^\circ) \quad a^5 + 1$$

$$9^\circ) \quad 32x^5 + y^5$$

$$10^\circ) \quad 32a^5 + 243b^5$$

$$11^\circ) \quad x^3 + y^6$$

$$12^\circ) \quad x^5 + y^{10}$$

76. Diferencia de potencias de exponente impar.

76-1. *Diferencia de dos cubos.*

En § 64-12 vimos que

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Invirtiendo la igualdad se obtiene

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Ejemplos.

$$1. \quad x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$$

$$2. \quad 8x^3 - 125y^3 = (2x)^3 - (5y)^3 = \\ = (2x - 5y)(4x^2 + 10xy + 25y^2)$$

$$3. \quad x^3 - y^6 = x^3 - (y^2)^3 = (x - y^2)(x^2 + xy^2 + y^4).$$

76-2. *Diferencia de dos potencias cualesquiera con el mismo exponente impar.*

Del ejemplo II del Ejercicio 51 resulta, invirtiendo la igualdad,

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

De la misma manera, se puede comprobar que

$$a^7 - b^7 = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$$

y, en general,

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

igualdad que es cierta siempre que n sea un entero positivo (impar o par). Por tanto:

La diferencia de dos potencias con el mismo exponente n impar (o par) se descompone en la diferencia de las bases por un polinomio homogéneo de grado $n - 1$ con coeficientes $+1$.

Ejemplos.

$$1. \quad x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$2. \quad 32c^5 - d^5 = (2c)^5 - d^5 = \\ = (2c - d)(16c^4 + 8c^3d + 4c^2d^2 + 2cd^3 + d^4).$$

El método anterior es también aplicable, como hemos indicado, a diferencias de potencias con exponente par, pero en estos casos se prefiere considerar el binomio como diferencia de dos cuadrados pues de esta manera se logra más fácilmente su descomposición completa en factores.

Ejemplo.

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3).$$

El segundo factor se puede descomponer ahora por agrupamiento, como sigue:

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = x^2(x + y) + y^2(x + y) = (x + y)(x^2 + y^2).$$

Por tanto:

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2).$$

Pero es a todas luces más ventajoso proceder como en § 70, a saber:

$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2).$$

EJERCICIO 63.

Descomponer en factores:

1º) $x^3 - y^3$

2º) $a^3 - b^3c^3$

3º) $a^3 - 1$

4º) $x^3 - 125$

5º) $y^3 - 8$

6º) $8x^3 - 125y^3$

7º) $x^5 - y^5$

8º) $a^5 - 32$

9º) $32x^5 - 1$

10º) $243a^5 - 32b^5$

11º) $x^3 - y^9$

12º) $x^{10} - a^5$.

77. Suma o diferencia de potencias de exponente par.

77-1. Suma de potencias de exponente par.

La suma de potencias de exponente par es descomponible en factores (con coeficientes racionales) cuando los exponentes contienen el mismo factor impar, en cuyo caso dicha suma puede expresarse como suma de potencias con el mismo exponente impar, y se aplica la regla estudiada en § 75.

Ejemplos.

1. $x^6 + y^6 = (x^2)^3 + (y^2)^3 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$

2. $a^{12} + b^{12} = (a^4)^3 + (b^4)^3 = (a^4 + b^4)(a^8 - a^4b^4 + b^8)$

3. $a^{12} + x^6 = (a^4)^3 + (x^2)^3 = (a^4 + x^2)(a^8 - a^4x^2 + x^4)$

4. $x^4 + y^4$, $x^8 + y^8$ etc., no son descomponibles.

77-2. Diferencia de potencias de exponente par.

Como ya indicamos en § 76-2, para descomponer en factores una diferencia de potencias de exponente par basta considerarla como una diferencia de cuadrados. Si los factores resultantes admiten a su vez descomposición en factores, se procede a efectuarla hasta que sean primos todos los factores obtenidos.

Ejemplos.

$$1. \quad x^6 - y^6 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) \\ = (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$2. \quad x^8 - y^8 = (x^4 + y^4)(x^4 - y^4) \\ = (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \\ = (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y).$$

EJERCICIO 64.

Descomponer en factores:

1º) $a^6 + b^6$

2º) $a^6 - b^6$

3º) $x^6 + 64y^6$

4º) $x^6 - 64y^6$

5º) $x^{12} + y^{12}$

6º) $x^{12} - y^{12}$

7º) $a^{10} + x^{10}$

8º) $a^{10} - x^{10}$

9º) $x^6 + 1$

10º) $a^8 - 1$

11º) $x^{20} + y^{20}$

12º) $x^{10} - 1$

13º) $x^{12} + y^6$

14º) $x^{12} - y^6$

15º) $a^{12} + 729$

16º) $a^{12} - 729b^{12}$

17º) $x^6y^6 + z^{18}$

18º) $a^{18} - b^6$

19º) $(a + b)^6 + c^6$

20º) $a^6 - (b + c)^6$

78. Polinomios que contienen factores de la forma $x + a^*$.

Si un polinomio cualquiera con coeficientes enteros, como por ejemplo,

$$kx^3 + mx^2 + nx + p$$

es divisible por un binomio de primer grado de la forma $x + a$, el número a deberá ser un divisor de p . En efecto, en una división exacta el último término del dividendo es igual al producto del último término del cociente por el último término del divisor. Tendremos, pues, $p = aq$, representando por q el último término del cociente.

Por tanto, si un polinomio contiene factores de la forma $x + a$, el número a habrá que buscarlo entre los divisores (positivos y negativos) de p .

* Antes de estudiar el párrafo 78, el alumno debe repasar el § 57.

Ensayando sucesivamente los posibles divisores $x + a$ se podrá determinar si el polinomio dado contiene o no un factor o divisor de esta forma. Para ello es ventajoso usar el método de división sintética explicado en § 57.

Ejemplos.

$$1. \quad x^3 - 8x^2 + 16x - 5.$$

Los divisores de -5 son: $+1, -1, +5, -5$. Por tanto, los posibles divisores de primer grado del polinomio dado son los siguientes:

$$x + 1, \quad x - 1, \quad x + 5, \quad x - 5.$$

Ensayando las divisiones correspondientes, tendremos:

$$\begin{array}{r|l} 1 - 8 + 16 - 5 & -1 \\ -1 + 9 - 25 & \\ \hline 1 - 9 + 25 - 30 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 - 8 + 16 - 5 & +1 \\ +1 - 7 + 9 & \\ \hline 1 - 7 + 9 + 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 - 8 + 16 - 5 & -5 \\ -5 + 65 - 405 & \\ \hline 1 - 13 + 81 - 410 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 - 8 + 16 - 5 & +5 \\ +5 - 15 + 5 & \\ \hline 1 - 3 + 1 + 0 & \end{array}$$

Por consiguiente, el polinomio resulta divisible por $x - 5$ y el cociente exacto es $x^2 - 3x + 1$; es decir:

$$x^3 - 8x^2 + 16x - 5 = (x - 5)(x^2 - 3x + 1).$$

Es fácil comprobar que $x^2 - 3x + 1$ no es a su vez descomponible.

$$2. \quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Los divisores de -6 son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Las divisiones correspondientes a $x + 1$ y a $x - 1$ son:

$$\begin{array}{r|l} 1 - 6 + 11 - 6 & -1 \\ -1 + 7 - 18 & \\ \hline 1 - 7 + 18 - 24 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 - 6 + 11 - 6 & +1 \\ +1 - 5 + 6 & \\ \hline 1 - 5 + 6 + 0 & \end{array}$$

Por tanto,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Ahora bien, el cociente $x^2 - 5x + 6$, que es un trinomio de la forma estudiada en § 73, admite a su vez la descomposición $(x - 2)(x - 3)$. Luego,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

También se puede aplicar al cociente hallado el método de división sintética. Las operaciones necesarias se acostumbra disponerlas como sigue:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 - 6 + 11 - 6 \\ +1 & \\ \hline 1 & 1 - 5 + 6 \\ +2 & \\ \hline 1 & 1 - 3 \end{array}$$

Se han usado sucesivamente los divisores $x - 1$ y $x - 2$, y el último cociente obtenido es $x - 3$. Por tanto, resulta la factorización $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

$$3. \quad x^3 - 12x + 16.$$

Se tiene

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 + 0 - 12 + 16 \\ +2 & \\ \hline 1 & 1 + 2 - 8 \\ +2 & \\ \hline 1 & 1 + 4 \end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned} x^3 - 12x + 16 &= (x - 2)(x - 2)(x + 4) \\ &= (x - 2)^2(x + 4). \end{aligned}$$

EJERCICIO 65.

Descomponer en factores:

$$1^\circ) \quad x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

$$2^\circ) \quad x^3 - 4x^2 + 4x - 3$$

$$3^\circ) \quad x^3 - 4x^2 + x + 6$$

$$4^\circ) \quad x^3 + 4x^2 + x - 6$$

5º) $x^3 - 8x^2 + 16x - 5$

6º) $x^3 - 10x - 3$

7º) $x^3 - 8x + 3$

8º) $x^3 + 7x^2 + 12x + 4$

9º) $x^3 - 3x^2 + 4$

10º) $x^3 + 4x^2 - 5$

11º) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + x - 3$

12º) $4x^3 - 12x^2 + 11x - 6$

13º) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x - 6$

14º) $2x^3 - 9x^2 - 7x + 10$

15º) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$

16º) $x^3 + 2x^2 + 9$

17º) $x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 19x + 12$

18º) $x^3 - 24x + 5$

19º) $x^3 - 14x + 8$

20º) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24.$

79. Teorema del resto. Aplicaciones.

En este párrafo usaremos la notación $P(x)$ para indicar un polinomio cualquiera, racional y entero, que contenga la letra x (o, como se dice brevemente, un polinomio en x). Por ejemplo:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 11.$$

El valor numérico del polinomio para $x = 2$ se expresa escribiendo $P(2)$, el valor numérico para $x = 3$ se representa por $P(3)$, y en general, el valor numérico del polinomio para $x = a$ se representa por $P(a)$.

Así, en el caso del polinomio de tercer grado escrito más arriba, tendríamos:

$$P(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 11 = 5.$$

Análogamente,

$$P(3) = -1, \quad P(-2) = -31, \quad \text{etc.}$$

Hagamos la división de $P(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 11$ por el binomio $x - 2$. Se obtiene:

$$\begin{array}{r|l} 1 - 6 + 5 + 11 & 2 \\ + 2 - 8 - 6 & \\ \hline 1 - 4 - 3 + 5 & \end{array}$$

de modo que el cociente de la división es $x^2 - 4x - 3$ y el resto es $+5$. Obsérvese que el resto es precisamente igual al valor que toma el polinomio para $x = 2$, esto es,

$$P(2) = +5 = \text{resto de la división por } x - 2.$$

Este hecho no es casual. Por ejemplo, si ensayamos la divi-

sión del mismo polinomio anterior por $x - 3$ veremos que su resto es $P(3) = -1$; y si ensayamos la división por $x + 2$ veremos que su resto es $P(-2) = -31$.

En efecto:

$$\begin{array}{r} 1 - 6 + 5 + 11 \quad | \quad 3 \\ + 3 - 9 - 12 \\ \hline 1 - 3 - 4 - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 - 6 + 5 + 11 \quad | \quad -2 \\ - 2 + 16 - 42 \\ \hline 1 - 8 + 21 - 31 \end{array}$$

Es fácil demostrar que necesariamente ha de ser así en todos los casos. Consideremos primero, para comprenderlo bien, el caso de la división de $x^3 - 6x^2 + 5x + 11$ por $x - 2$; como el cociente es $x^2 - 4x - 3$ y el resto es $+5$ y sabemos que

$$\text{dividendo} = \text{divisor} \times \text{cociente} + \text{resto}$$

tenemos:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 11 = (x - 2)(x^2 - 4x - 3) + 5.$$

Si en esta igualdad se hace $x = 2$ resulta:

$$P(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 11 = (2 - 2)(2^2 - 4 \cdot 2 - 3) + 5 = +5$$

puesto que $2 - 2 = 0$.

En general, si representamos por $P(x)$ el dividendo, por $x - a$ el divisor, por $Q(x)$ el cociente y por R el resto, se tiene

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R.$$

Haciendo en esta igualdad $x = a$ se deduce

$$P(a) = (a - a)Q(a) + R$$

o bien,

$$P(a) = R$$

puesto que $a - a = 0$.

Hemos obtenido así el llamado

TEOREMA DEL RESTO. *El resto de la división de un polinomio por un binomio de la forma $x - a$ es igual al resultado de sustituir en el polinomio la x por la a . En símbolos:*

$$R = P(a).$$

Un binomio de la forma $x + a$ se puede escribir $x - (-a)$; por tanto, el resto de la división será en este caso $P(-a)$.

Ejemplo.

El resto de la división de $P(x) = x^3 - x + 2$ por $x + 5$ es

$$P(-5) = (-5)^3 - (-5) + 2 = -118.$$

Si un polinomio es divisible por un binomio el resto de su división es cero; inversamente, si el resto de la división es cero, el polinomio es divisible por el binomio. Desde luego, si el resto de la división no es cero, el polinomio no es divisible (exactamente) por el binomio.

Resulta así el siguiente corolario o consecuencia del teorema del resto, muy útil, como veremos en seguida, en las teorías de la divisibilidad algebraica y de la descomposición en factores.

COROLARIO. *Es condición necesaria y suficiente para que un polinomio $P(x)$ sea divisible por un binomio $x - a$, que el polinomio se reduzca a cero para $x = a$, esto es, que se tenga $P(a) = 0$.*

Ejemplo.

El polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ es divisible por $x - 3$ puesto que

$$P(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 0.$$

El teorema del resto puede usarse para calcular el resto R por medio del valor del polinomio $P(a)$ o, viceversa, puede usarse para calcular el valor del polinomio por medio del resto.

En el ejemplo anterior hemos hallado el resto por medio del valor del polinomio. En la práctica, sin embargo, en casos semejantes a éste, suele hallarse el resto directamente mediante la división sintética (lo cual es, en general, más breve), como hicimos en § 78.

Hay casos, no obstante, en que conviene proceder a la inversa, por ser fácil o inmediata la determinación de $P(a)$. Esto es lo que vamos a ver en las siguientes aplicaciones, cuyo interés justifica el estudio del teorema del resto en Álgebra elemental.

Aplicaciones.**79-1. Divisibilidad de $x^n \pm a^n$ por $x \pm a$ ($a \neq 0$).**

Examinemos la divisibilidad de la suma o diferencia de potencias de igual exponente por la suma o diferencia de las bases, con objeto de verificar y generalizar los resultados estudiados en § 75, 76 y 77.

1) $P(x) = x^n - a^n$ siempre es divisible por $x - a$, puesto que $P(a) = a^n - a^n = 0$.

Es decir: *la diferencia de potencias es divisible por la diferencia de las bases, cualquiera que sea el exponente**.

Ejemplos.

$$x^5 - 3^5 \text{ es divisible por } x - 3,$$

$$x^4 - 2^4 \text{ es divisible por } x - 2.$$

2) $P(x) = x^n + a^n$ nunca es divisible por $x - a$, puesto que $P(a) = a^n + a^n = 2a^n \neq 0$.

Es decir: *la suma de potencias nunca es divisible por la diferencia de las bases, cualquiera que sea el exponente.*

Ejemplos.

$$x^3 + 2^3 \text{ no es divisible por } x - 2,$$

$$x^4 + 1 \text{ no es divisible por } x - 1.$$

3) $P(x) = x^n - a^n$ es divisible por $x + a$ si el exponente n es par y sólo en ese caso. En efecto,

$$P(-a) = (-a)^n - a^n = 0 \quad \text{si } n \text{ es par,}$$

$$P(-a) = (-a)^n - a^n = -2a^n \neq 0 \quad \text{si } n \text{ es impar.}$$

Por tanto: *La diferencia de potencias es divisible por la suma de las bases únicamente cuando el exponente es par.*

* Se sobreentiende que los exponentes son números naturales, puesto que tratamos exclusivamente el caso de polinomios enteros.

Aunque no lo digamos, por evitar el incurrir en continuas repeticiones, entiéndase también que se trata siempre de suma o diferencia de potencias del mismo grado (con el mismo exponente).

Ejemplos.

$x^4 - y^4$ es divisible por $x + y$,

$x^3 - y^3$ no es divisible por $x + y$.

4) $P(x) = x^n + a^n$ es divisible por $x + a$ si el exponente n es impar y sólo en ese caso. En efecto,

$$P(-a) = (-a)^n + a^n = 0 \quad \text{si } n \text{ es impar,}$$

$$P(-a) = (-a)^n + a^n = 2a^n \neq 0 \quad \text{si } n \text{ es par.}$$

Por tanto: *La suma de potencias es divisible por la suma de las bases únicamente cuando el exponente es impar.*

Ejemplos.

$x^3 + 2^3$ es divisible por $x + 2$,

$x^6 + 1$ no es divisible por $x + 1$.

De lo anterior resulta que *la suma de potencias pares no es divisible ni por la suma ni por la diferencia de las bases.*

79-2. Descomposición en factores de expresiones cíclicas.

Una expresión, tal como $x^2 + y^2 + z^2$, se dice *cíclica* cuando se transforma en una expresión equivalente sustituyendo la x por la y , la y por la z y la z por la x . Así, en el ejemplo anterior obtendríamos $y^2 + z^2 + x^2$ que es equivalente a $x^2 + y^2 + z^2$.

Otros ejemplos.

Son también expresiones cíclicas las siguientes:

$$x^2y + y^2z + z^2x$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$(y - z)^3 + (z - x)^3 + (x - y)^3.$$

Vamos a dar a continuación dos ejemplos de descomposición en factores de expresiones cíclicas.

Ejemplo 1.

Descomponer en factores

$$x^2y + y^2z + z^2x - xy^2 - yz^2 - zx^2.$$

Investiguemos si la expresión es divisible por $x - y$ para lo cual hallaremos el resto sustituyendo $x = y$. Se obtiene:

$$y^3 + y^2z + z^2y - y^3 - yz^2 - zy^2 = 0,$$

luego la expresión es divisible por $x - y$.

Como la expresión es cíclica, también será divisible por $y - z$ y por $z - x$. Puesto que la expresión es de tercer grado no puede contener otros factores. Sin embargo, el producto $(x - y)(y - z)(z - x)$ puede diferir de la expresión dada en un factor numérico. Pongamos entonces

$$x^2y + y^2z + z^2x - xy^2 - yz^2 - zx^2 = A(x - y)(y - z)(z - x)$$

en donde A es un número a determinar. Siendo A un número, no depende de los valores particulares que se puedan dar a las letras que figuran en la expresión. Haciendo $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ encontramos

$$-2 = A(-1)(-1)(2) \quad \text{de donde} \quad A = -1.$$

Por tanto,

$$x^2y + y^2z + z^2x - xy^2 - yz^2 - zx^2 = -(x - y)(y - z)(z - x).$$

Ejemplo 2.

Descomponer en factores

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3.$$

Haciendo $x = y$ se obtiene

$$(y - z)^3 + (z - y)^3 = 0$$

luego la expresión es divisible por $x - y$. Análogamente, ella es divisible por $y - z$ y por $z - x$. Por tanto,

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = A(x - y)(y - z)(z - x)$$

en donde A es, como antes, un número a determinar. Haciendo $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$ se encuentra

$$6 = A(-1)(-1)(2) \quad \text{de donde} \quad A = 3.$$

Luego,

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x).$$

EJERCICIO 66.

I. Verificar el teorema del resto en los siguientes casos, es decir, hallar el resto por división directa y luego mediante la evaluación del polinomio correspondiente:

1º) $x^2 - 7x + 9$ por $x - 1$

2º) $x^2 + 3x + 1$ por $x - 2$

3º) $x^3 + x^2 + 5$ por $x + 1$

4º) $x^3 - 2x + 8$ por $x + 2$

5º) $x^3 + x^2 - 2x + 6$ por $x - 3$

II. En los siguientes ejemplos determinar el resto sin efectuar la división, hallando el valor correspondiente del polinomio:

1º) $x^2 + 4x + 1$ por $x - 2$

2º) $x^2 - 3x + 7$ por $x - 1$

3º) $x^3 + 2$ por $x + 1$

4º) $x^3 - 2x - 4$ por $x - 2$

5º) $x^4 + 16$ por $x + 2$

III. Decir si

1º) $x^3 - y^3$ es divisible por $x + y$

2º) $x^6 - y^6$ es divisible por $x + y$

3º) $x^6 - y^6$ es divisible por $x - y$

4º) $x^5 - y^5$ es divisible por $x - y$

5º) $x^3 + y^3$ es divisible por $x - y$

6º) $x^3 + y^3$ es divisible por $x + y$

7º) $x^6 + y^6$ es divisible por $x - y$

8º) $x^6 + y^6$ es divisible por $x + y$

9º) $x^4 - 16$ es divisible por $x + 2$

10º) $x^4 - 16$ es divisible por $x - 2$.

IV. Descomponer en factores las expresiones siguientes:

1º) $yz(y - z) + zx(z - x) + xy(x - y)$

2º) $x(y + z)^2 + y(z + x)^2 + z(x + y)^2 - 4xyz$

3º) $a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 + 8abc$

4º) $a^4(b^2 - c^2) + b^4(c^2 - a^2) + c^4(a^2 - b^2)$

5º) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

80. Descomposición general en factores de un trinomio de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c$.

Se supone $a \neq 0$ y que los coeficientes a, b, c representan números racionales. Multiplicando y dividiendo el trinomio por $4a$ se tiene:

$$[1] \quad ax^2 + bx + c = \frac{4a^2x^2 + 4abx + 4ac}{4a}$$

Ahora bien, puesto que

$$(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$$

resulta

$$(2ax + b)^2 - b^2 = 4a^2x^2 + 4abx,$$

luego la igualdad [1] se puede escribir en la forma

$$ax^2 + bx + c = \frac{(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac}{4a}$$

o bien,

$$ax^2 + bx + c = \frac{(2ax + b)^2 - \sqrt{b^2 - 4ac}^2}{4a}$$

y, finalmente,

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a} (2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac})(2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}).$$

La expresión $b^2 - 4ac$ se llama *discriminante* del trinomio. Por medio del discriminante se puede determinar si un trinomio dado es compuesto (es decir, descomponible) en un sistema numérico fijado (racional, real, etc.). Se obtienen inmediatamente los siguientes resultados:

1) Si $b^2 - 4ac$ es un número cuadrado perfecto el trinomio es descomponible en factores con coeficientes racionales. En particular, si $b^2 - 4ac = 0$ el trinomio es un cuadrado perfecto (salvo, quizás, un factor constante).

2) Si $b^2 - 4ac > 0$, pero $b^2 - 4ac$ no es un cuadrado perfecto, el trinomio es primo en el sistema de los números racionales, pero descomponible en el sistema de los números reales.

3) Si $b^2 - 4ac < 0$ el trinomio es primo en el sistema de los números reales (y, por tanto, en el de los racionales), pues no existe ningún número real cuyo cuadrado sea un número negativo, es decir, no se puede extraer raíz cuadrada a un número negativo en el sistema de los números reales. Más adelante veremos que ampliando de nuevo el sistema numérico se logra la descomposición del trinomio (así como la de cualquier polinomio) en factores de primer grado.

El método anterior es aplicable también a los trinomios de la forma $ax^2 + bxy + cy^2$. Procediendo análogamente resulta:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \frac{1}{4a} [2ax + (b + \sqrt{b^2 - 4ac})y][2ax + (b - \sqrt{b^2 - 4ac})y].$$

Ejemplos.

1º) $6x^2 - 7x - 3.$

Puesto que

$$b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(6)(-3) = 121 = 11^2$$

el trinomio dado es descomponible en factores con coeficientes racionales. Se tiene, efectivamente,

$$6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1).$$

$$2^\circ) \quad 5x^2 + 3x - 1.$$

Aquí se tiene

$$b^2 - 4ac = 9 - 4(5)(-1) = 29.$$

El discriminante es positivo pero no es un cuadrado perfecto. Por tanto, el trinomio no es descomponible en factores con coeficientes racionales, pero sí en factores con coeficientes reales.

$$3^\circ) \quad x^2 - xy + y^2.$$

Este trinomio ocurre en la descomposición de $x^3 + y^3$ en factores. En este caso se tiene

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3.$$

Por tanto, el trinomio considerado es primo en el sistema de los números reales.

EJERCICIO 67.

Calcular el discriminante y averiguar si los trinomios siguientes admiten factores con coeficientes racionales:

$$1^\circ) \quad x^2 - 4x - 5$$

$$2^\circ) \quad x^2 + 2x - 15$$

$$3^\circ) \quad x^2 - 3x - 18$$

$$4^\circ) \quad x^2 + x + 2$$

$$5^\circ) \quad x^2 - 3x + 4$$

$$6^\circ) \quad 3x^2 - x - 2$$

$$7^\circ) \quad 6x^2 - x - 2$$

$$8^\circ) \quad 4x^2 + 13x + 3$$

$$9^\circ) \quad 3x^2 - x - 1$$

$$10^\circ) \quad 5x^2 + 6x + 3$$

$$11^\circ) \quad 17x + 12 + 6x^2$$

$$12^\circ) \quad 12x^2 - x - 1$$

$$13^\circ) \quad 4z^2 + 7x - 15$$

$$14^\circ) \quad 10t^2 - 3t - 15$$

$$15^\circ) \quad 8x^2 + 21x - 9$$

$$16^\circ) \quad x^2 + xy + y^2$$

$$17^\circ) \quad x^2 - 4xy + 4y^2$$

$$18^\circ) \quad 6x^2 + 19xy - 7y^2$$

$$19^\circ) \quad 6x^2 - xy - 35y^2$$

$$20^\circ) \quad 15x^2 + 8xz - 16z^2.$$

EJERCICIO 68. (REPASO).

Descomponer en factores:

$$1^\circ) \quad 3a^2 - 5a$$

$$2^\circ) \quad x^3 + x^2y + 2xy^2$$

$$3^\circ) \quad 2x^5 - 4x^2 + 5x^3$$

$$4^\circ) \quad a^4b - a^3b^2 + a^2b^3$$

$$5^\circ) \quad 2x^2y - 6xy^2 + 3xy$$

$$6^\circ) \quad 5a^3x + 10a^3x^2 - 20a^3x^3$$

$$7^\circ) \quad 3a^2b^2c^2 - 6abc + 9a^3b^3c^3$$

$$8^\circ) \quad 4x^3y^3 - 8x^2y^2z^2 + 12xyz$$

$$9^\circ) \quad 2a^2y + 4a^2y^2 + 8a^2$$

$$10^\circ) \quad 6a^2c - 12ac^2 - 3a^2c^2$$

- 119) $2x^2 - 5xy + 4ax - 10ay$
 139) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$
 159) $1 + 20x^4 - 4x^3 - 5x$
 179) $ax + bx + ay + by + az + bz$
 199) $ax - ay + az + x - y + z$
 209) $x^{2n} + x^{n+3} - x^{n+1} - x^4 \quad (n > 3)$
 219) $a^2 + 6ab + 9b^2$
 239) $x^2 - 10x + 25$
 259) $121a^2 - 110a + 25$
 279) $36x^2 - 84xy + 49y^2$
 299) $4x^4 + 12x^2y^2 + 9y^4$
 319) $a^2 - 9$
 339) $25 - 100a^2$
 359) $x^2 - \frac{25}{4}y^2$
 379) $3a^5 - 12a^3b^4$
 399) $(x - 3y)^2 - 16z^2$
 419) $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2$
 439) $9x^2 - 4a^2 + 4a - 1$
 459) $2a + c^2 - 1 - a^2$
 479) $x^2 - 2x + 1 - a^2 + 2ay - y^2$
 489) $a^4 - a^2 - 9 + b^4 - 2a^2b^2 + 6a$
 499) $25x^2 - 1 - 10ax - 4y^2z^2 + a^2 + 4yz$
 509) $a^4 - 2a^2x - x^4 - 2x^2y^2 - y^4 + x^2$
 519) $b^4 + b^2 + 1$
 539) $a^4 + a^2b^2 + 25b^4$
 559) $4a^4 + b^4$
 579) $x^2 + 7x + 10$
 599) $x^2 - 3xy - 4y^2$
 619) $5x^2 - 8x + 3$
 639) $4a^2 - 4a - 3$
 659) $2x^2 + 5xz + 2z^2$
 679) $a^3 + 125$
 699) $a^3b^3 + 64$
 719) $64x^3 - 343y^3$
 129) $x^2 + xy - ax - ay$
 149) $a^4 - a^3 - a + 1$
 169) $1 + a - a^3mn - a^2mn$
 189) $a^2 - ab + ac - a + b - c$
 229) $4x^2 + 4x + 1$
 249) $1 - 20y + 100y^2$
 269) $x^6 + 14x^3 + 49$
 289) $25a^2b^2 - 40abc + 16c^2$
 309) $(x + y)^2 - 6a(x + y) + 9a^2$
 329) $x - x^5$
 349) $a^2b^2 - 16c^2$
 369) $x^4 - 4y^2$
 389) $x^8 - 256$
 409) $(x + 2)^2 - (2x - 3)^2$
 429) $x^2 - y^2 - z^2 - 2yz$
 449) $1 - a^2 + 6ab - 9b^2$
 469) $x^2 + y^2 - 2xy - 2a - a^2 - 1$
 529) $a^4 - 3a^2x^2 + x^4$
 549) $25a^4 + 24a^2b^2 + 16b^4$
 569) $x^8 + 64y^8$
 589) $x^2 - 7x - 8$
 609) $a^2 + 4ab - 21b^2$
 629) $3x^2 - 2x - 5$
 649) $6a^2 - 7ab - 3b^2$
 669) $12a^2 - 7ax - 10x^2$
 689) $8a^3 - 27b^3$
 709) $216 + x^6$
 729) $x^3y^6 + 1$

- 73°) $(a + 3)^3 + 8$ 74°) $x^3 - (y - z)^3$
 75°) $(x + y)^3 + (x - y)^3$ 76°) $(a + 1)^3 - (a - 1)^3$
 77°) $64x^6 - y^6$ 78°) $a^2 - ab - b - 1$
 79°) $a^2 - b^2 + a^3 - b^3$
 80°) $(x^3 - y^3) - (x - y)^2 + (x^2 - y^2)$
 81°) $x^2 - xy + y^2 - x^3 - y^3$ 82°) $x^3 + x^2 - 3x - 6$
 83°) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$ 84°) $x^3 - 4x^2 + 5$
 85°) $x^3 + 5x^2 - 6$ 86°) $x^4 + 3x^3 - 2x + 4$
 87°) $x^5 - x$ 88°) $a^3 - b^3 + a - b$
 89°) $a^3 - x^3 - 3ax(a - x)$
 90°) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
 91°) $a^4 - b^4 + 2ab(a^2 - b^2)$ 92°) $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$
 93°) $a^3 + b^3 + 2a^2b + 2ab^2$ 94°) $9m^4 + 3m^2b^2 + 4b^4$
 95°) $x^2y^n + 2xy^{n+1} + y^{n+2}$ 96°) $c^{4n} + c^{3n} + c^{2n} + c^n$
 97°) $a^4b^2 - a^2b^4 + 16b^6$ 98°) $a^2x - 2ax^2 - 2x^2 - x$
 99°) $x^6y^9 + x^{12}$ 100°) $(2x - y)^3 - (x + 2y)^3$
 101°) $x^2 + 2xy + y^2 + 2 + 3x + 3y$
 102°) $6x^2 - 5xy - 6y^2 - 6xz + 9yz$
 103°) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 3x - 4$
 104°) $12 + 7(a + b) - 10(a + b)^2$
 105°) $16x^{2n} - (y + z)^2$
 106°) $4u^2 - 2xy - 12uv - x^2 + 9v^2 - y^2$
 107°) $8x^4 + x$
 108°) $x^4y^4 + 4$
 109°) $a^2x - a^2y + bx^2 - by^2$
 110°) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2xz$
 111°) $x^3 - 2x^2y + x^2 - 4x - 4 + 8y$
 112°) $(m - n)^2 - 2(m - n - 1) - 1$
 113°) $2xy - ax - 2yz + az - ay + 2y^2$
 114°) $x^2 + x - y^2 + y - z^2 - z + 2yz$
 115°) $12a^3 + 20a^2 - a + 14$
 116°) $2a^2 - 5ab + 2b^2 - 3ac + 6bc$
 117°) $a + b - c + a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$
 118°) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 8x + 24y + 15$
 119°) $a^2 + 8ab + 16b^2 - a - 4b - 20$

- 120º) $9a^2 - 6ab + b^2 - 21x^2 + 12ax - 4bx$
 121º) $2ab - 2bc - ad + cd + 2b^2 - bd$
 122º) $a^4 - 2a^2xy - x^4 - x^2y^2 - y^4$
 123º) $1 + 2ab - a^4 - b^4 - a^2b^2$
 124º) $4x^2y^2 + 4y^4 - x^8 - x^4 - 1$
 125º) $x^5 + x + 1$.

TEST 8.

1º) Descomponer en factores:

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| a) $a^2c - 12abc + 36b^2c$ | b) $a^5 - 81a$ |
| c) $x^2 - 1 + 2y - y^2$ | d) $a^2x - a^2y - b^2y + b^2x$ |
| e) $a^4 - 8a^2b^2 + 4b^4$ | f) $x^6 - 64y^6$ |

2º) En cada uno de los siguientes casos factorizar usando dos métodos distintos e indicar en cada caso el método empleado:

- | | |
|-------------------------|-------------------|
| a) $x^2 + 6x + 9$ | b) $2x^2 + x - 6$ |
| c) $x^3 - 3x^2 + x - 3$ | d) $x^3 + 1$. |

CAPÍTULO 9.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS ENTERAS.

81. Divisor común y máximo común divisor de expresiones algebraicas enteras.

Divisor o factor común de varias expresiones algebraicas enteras es toda expresión entera que divide exactamente a cada una de ellas. Cuando las expresiones dadas no tienen divisor literal común alguno, se dice que son *primas entre sí*.

Máximo común divisor de varias expresiones enteras es su divisor común de mayor grado.

Estas definiciones tienen significado diverso según el sistema numérico que se admita para los coeficientes.

Como en Aritmética, máximo común divisor se escribe abreviamente m. c. d.

Ejemplos.

1. Sean los monomios

$$12a^3b, \quad 18a^2b^3 \quad \text{y} \quad -24a^4b^2.$$

He aquí algunos divisores comunes con coeficientes enteros:

$$2a, \quad -3b, \quad 6ab, \quad -6a^2b.$$

El máximo común divisor de los monomios dados sería

$$+6a^2b, \quad \text{o bien,} \quad -6a^2b.$$

En la teoría de la divisibilidad algebraica dos divisores que difieren en un factor constante distinto de cero se consideran como equivalentes (véase § 66).

Como los monomios escritos arriba, a saber, $+6a^2b$ y $-6a^2b$, difieren en el factor -1 , pueden considerarse como equivalentes. Generalmente se dice que el m. c. d. de los monomios dados es $6a^2b$, escribiendo solamente el valor absoluto del coeficiente numérico.

Si admitiésemos como coeficientes números racionales, el máximo común divisor de los monomios anteriores sería Ca^2b , en donde $C \neq 0$ representa un número racional cualquiera.

2. Consideramos las expresiones

$$4x^2 - 4y^2 \quad \text{y} \quad 2x^2 - 4xy + 2y^2.$$

Descomponiendo ambas en factores tenemos:

$$4x^2 - 4y^2 = 4(x + y)(x - y)$$

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x - y)(x - y)$$

Por tanto, un divisor común de ambas expresiones sería $x - y$; y el máximo común divisor (con coeficientes enteros) es $2(x - y)$.

Si se admitiesen coeficientes racionales, el m. c. d. sería $C(x - y)$, en donde $C \neq 0$ es un número racional cualquiera.

En el Álgebra elemental la teoría del m. c. d. tiene relativamente poca importancia y suele restringirse su estudio al caso de coeficientes enteros. En lo que sigue nos limitaremos a considerar este caso.

82. Determinación del máximo común divisor de varios monomios.

Para que un monomio divida a otro debe contener sus mismos factores con iguales o menores exponentes. Por tanto, para hallar el m. c. d. de varios monomios basta escribir el producto de todos los factores primos comunes elevando cada uno al menor exponente con que figure en dichos monomios.

Ejemplo.

Hallar el máximo común divisor de $18a^3b^2$ y $-45a^2b^3c^2$.

Se tiene:

$$18a^3b^2 = 2 \cdot 3^2 a^3b^2$$

$$-45a^2b^3c^2 = -3^2 \cdot 5 a^2b^3c^2$$

luego

$$\text{m. c. d.} = 3^2 a^2 b^2 = 9a^2 b^2.$$

Nótese que no podríamos dar como resultado, v. gr. $9a^3 b^2$, pues este monomio no dividiría a $-45a^2 b^3 c^2$; es decir, el cociente no sería un monomio *entero*. En efecto,

$$\frac{-45a^2 b^3 c^2}{9a^3 b^2} = -5a^{-1} b c^2 = -\frac{5bc^2}{a}.$$

Tampoco podríamos dar como respuesta $9a^2 b^2 c$ pues este monomio no divide a $18a^3 b^2$.

EJERCICIO 69.

Hallar el m. c. d. de los monomios siguientes:

$$1^\circ) 40x^2, 70x^3$$

$$2^\circ) 36a^4, 56a^6$$

$$3^\circ) 15xy^2, 60x^3y$$

$$4^\circ) 35x^2y^2z^2, 49x^3y^2z^4$$

$$5^\circ) 30a^2x, 40ax^2, 50a^2x^2$$

$$6^\circ) a^4b^2c^3, a^3b^4c^2$$

$$7^\circ) 21x^2y^3, 63x^3y^4, 70x^4y^3$$

$$8^\circ) 3a^2mn^3, 11a^4bm^2$$

$$9^\circ) 8x(a-b)^2, 30x^2(a-b)^3$$

$$10^\circ) 6a^2(x+y)^3, 9a(x+y)^2, 15a^3(x+y)^4$$

83. Determinación del máximo común divisor de varios polinomios por descomposición en factores.

Si los polinomios dados son fácilmente descomponibles en factores, se procede a efectuar su descomposición en factores primos, y para hallar el m. c. d. se forma, como antes, el producto de todos los factores primos comunes, elevando cada uno al menor exponente con que figure en dichas factorizaciones.

Ejemplo.

Hallar el m. c. d. de $3x^2 - 6x - 24$, $6x^2 - 48x + 96$ y $3x^3 - 48x$.

Se tiene:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x - 24 &= 3(x^2 - 2x - 8) = \\ &= 3(x - 4)(x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x^2 - 48x + 96 &= 6(x^2 - 8x + 16) = \\ &= 6(x - 4)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^3 - 48x &= 3x(x^2 - 16) = \\ &= 3x(x + 4)(x - 4). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\text{m. c. d.} = 3(x - 4).$$

EJERCICIO 70.

Hallar el m.c.d. de los polinomios siguientes:

- 1º) $x^2 - 8x + 15, x^2 - 5x$
- 2º) $x^2 + 3x, x^3 - 9x$
- 3º) $x^2 + 3x + 2, x^2 + 4x + 4, x^2 + 2x$
- 4º) $8x^3 + y^3, 4x^2 - y^2$
- 5º) $a^3 - 27b^3, a^2 + 3ab + 9b^2$
- 6º) $a^4 - 16, a^4 - 3a^2 - 4$
- 7º) $a^2 - ab - 20b^2, a^2 + ab - 30b^2$
- 8º) $x^4 - 7x^3 + 12x^2, x^5 + 2x^4 - 24x^3$
- 9º) $4a^2 - 25b^2, 4a^3 - 125b^3, 4a^2 - 20ab + 25b^2$
- 10º) $x^4 - x^3y, y^2 - x^2, xy^3 - y^4$
- 11º) $x^4 - y^4, x^3 + y^3 - x^2y - xy^2, x^4 - 2x^2y^2 + y^4$
- 12º) $x^6 - x^5y, x^2 - 2xy + y^2, xy^3 - y^4$
- 13º) $2x^2 - 11x + 15, x^3 - 2x^2 - 4x + 3$
- 14º) $a^4 + a^2 + 1, a^2 - a + 1, a^3 + 1$
- 15º) $x^6 + y^6, x^3 + x^2y + xy^2 + y^3, x^8 - y^8$
- 16º) $x^3 + 2x^2 - 2x + 3, x^3 + 1$
- 17º) $x^3 + 3x^2y + 2xy^2, x^4 + 6x^3y + 8x^2y^2$
- 18º) $4x^2 - 2xy - 6y^2, 4x^2 - 10xy + 6y^2, 8x^2 - 18y^2$
- 19º) $a^4 - 13a^2 + 36, (a^2 + a - 6)^2$
- 20º) $(x^2 + x - 2)^2, x^3 + 4x^2 + 4x, (x^4 - x^3 - 6x^2)^2$.

84. Determinación del máximo común divisor de dos polinomios por divisiones sucesivas.

Este método se basa en el siguiente

TEOREMA. Si las cuatro expresiones algebraicas enteras A, B, C, R, son tales que

$$[1] \quad A = BC + R$$

los divisores comunes de A y B son los mismos divisores comunes de B y R.

En efecto, si D es un divisor común de A y B se tiene $A = DA'$, $B = DB'$, en donde A' y B' son expresiones enteras. Por tanto,

$$R = A - BC = DA' - DB'C = D(A' - B'C)$$

luego D es también un divisor de R y, por consiguiente, un divisor común de B y R . Recíprocamente, todo divisor común de B y R es también un divisor común de A y B .

COROLARIO. Si $A(x)$ y $B(x)$ son polinomios enteros en x , siendo el grado de $A(x)$ mayor o igual que el de $B(x)$, el cociente y el resto de la división de $A(x)$ por $B(x)$ están relacionados en la forma [1]. Por tanto:

Los factores comunes del dividendo y del divisor son los mismos que los del divisor y el resto.

Esto permite investigar el m. c. d. de dos polinomios por el método de divisiones sucesivas, análogo al que se usa en Aritmética para investigar el m. c. d. de dos números no fácilmente descomponibles en factores.

El método consiste en lo siguiente:

En primer lugar, si la división de A por B es exacta, evidentemente B es el m. c. d. de ambos, ya que es un divisor común y es el de mayor grado posible.

Si la división de A por B no es exacta y deja resto R_1 , se procede entonces a dividir B por R_1 ; si esta división es exacta, resulta

$$\text{m. c. d.}(A, B) = \text{m. c. d.}(B, R_1) = R_1.$$

Si no es exacta la división anterior y deja resto R_2 , se procede entonces a dividir R_1 por R_2 , y así sucesivamente hasta encontrar resto 0. El último divisor empleado será entonces el m. c. d. de los polinomios dados. Si este último divisor es un número k , desde el punto de vista de la divisibilidad algebraica los polinomios se consideran primos entre sí (es decir, sin factor literal común).

Ejemplo.

Hallar el m. c. d. de los polinomios $x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 31x - 30$ y $x^3 - 8x^2 + 17x - 10$.

Las divisiones sucesivas se disponen de la manera siguiente:

	$x + 1$	$x - 2$
$x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 31x - 30$	$x^3 - 8x^2 + 17x - 10$	$x^2 - 6x + 5$
$x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 10x$	$x^3 - 6x^2 + 5x$	
$x^3 - 12x^2 + 41x - 30$	$-2x^2 + 12x - 10$	
$x^3 - 8x^2 + 17x - 10$	$-2x^2 + 12x - 10$	
$-4x^2 + 24x - 20$	0	
$: -4) \quad x^2 - 6x + 5$		

Por tanto,

$$\text{m. c. d.} = x^2 - 6x + 5.$$

Como los polinomios dados no contienen ningún factor numérico común, la multiplicación o división de algún resto o divisor por un número (distinto de cero) no influye esencialmente en el resultado final. Así, en el caso anterior se dividió el primer resto hallado por -4 para evitar en la división siguiente números fraccionarios en el cociente.

El m. c. d. de tres o más polinomios se obtiene hallando el m. c. d. de dos de ellos, después el m. c. d. de este resultado y el tercer polinomio, y así sucesivamente.

EJERCICIO 71.

Hallar el m. c. d. de los polinomios siguientes por el método de divisiones sucesivas:

- 1º) $x^3 - x^2 + 2$, $x^3 + x^2 - 4x + 6$
- 2º) $3x^2 + x - 4$, $6x^3 - 7x^2 - 20x$
- 3º) $x^3 - x^2 - 8x + 12$, $x^3 + 4x^2 - 3x - 18$
- 4º) $4x^3 - x^2 - 3x$, $3x^3 - 3x^2 + x - 1$
- 5º) $x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 9x + 2$, $x^3 - 2x^2 - 14x + 3$
- 6º) $2x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x - 1$, $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 3$
- 7º) $3x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 5x + 12$, $3x^3 + 8x^2 + x + 12$
- 8º) $x^4 + x^3 - 9x^2 - 3x + 18$, $x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 67x - 42$
- 9º) $x^4 - 3x^2 + 3x - 1$, $x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
- 10º) $x^6 - 3x^5 + x^3 + 13x - 5$, $x^3 - 8x + 3$
- 11º) $2x^3 + 11x^2y + 3xy^2 - y^3$, $x^4 + 6x^3y + 5x^2y^2 + 4xy^3 - y^4$

$$12^\circ) \quad x^3 - x^2y - 7xy^2 + 3y^3, \quad 2x^5 - 5x^4y - 2x^3y^2 - 4x^2y^3 + 4xy^4 - 3y^5$$

$$13^\circ) \quad 4x^4 + 5x^2y^2 + xy^3 + 2y^4, \quad 2x^4 + 5x^3y + x^2y^2 + 5xy^3 + 2y^4$$

$$14^\circ) \quad x^3 - 2x^2 - 13x - 10, \quad 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6, \quad x^3 + 3x^2 - 3x - 10$$

$$15^\circ) \quad 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6, \quad 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 8x - 3, \\ 2x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 7x - 2.$$

85. Determinación del máximo común divisor de dos polinomios por suma y resta.

Este método, que es de útil aplicación en muchos casos, está basado en el siguiente

TEOREMA. Si A y B son dos expresiones algebraicas enteras y p y q son números, o más generalmente, expresiones algebraicas enteras, todo divisor común de A y B es también un divisor de $pA + qB$.

En efecto, si D es un divisor común de A y B y ponemos $A = DA'$, $B = DB'$, resulta:

$$pA + qB = pDA' + qDB' = D(pA' + qB').$$

Ejemplos.

1. Hallar el m. c. d. de los polinomios $3x^3 - 8x + 8$ y $x^3 - 6x + 4$.

Multiplicando el segundo polinomio por -3 y sumándolo con el primero se obtiene,

$$10x + 20 = 10(x + 2).$$

Como los polinomios dados no tienen ningún factor numérico entero común (excepto 1), el único factor común posible es $x + 2$. Efectuando las divisiones (hágase por coeficientes separados) se ve que $x + 2$ es divisor de ambos polinomios. Puesto que no hay posibilidad de otros divisores comunes (pues éstos aparecerían necesariamente en toda combinación de la forma $pA + qB$), se deduce que

$$\text{m. c. d.} = x + 2.$$

2. Hallar el m. c. d. de los polinomios $x^3 + x^2 + x + 1$ y $x^3 + x^2 + 2x + 4$.

Restando un polinomio de otro se obtiene $x + 3$. Pero este binomio no es divisor del primero de los polinomios dados (y, por consiguiente, tampoco del segundo). Por tanto, estos polinomios son primos entre sí.

Nótese que el teorema asegura que todo divisor común de A y B es también divisor de $pA + qB$, pero en ninguna parte se dice que el recíproco sea cierto; esto es, que un factor que aparezca en $pA + qB$ sea necesariamente un factor de A y B.

EJERCICIO 72.

Hallar el m. c. d. de los polinomios siguientes por el método de suma y resta:

$$1^{\circ}) \quad x^3 - 9x^2 + 25x - 20, \quad x^3 - x^2 - 15x + 12$$

$$2^{\circ}) \quad x^4 - x^2 + 1, \quad x^4 + x^2 + 1$$

$$3^{\circ}) \quad x^4 - 1, \quad x^3 + 1$$

$$4^{\circ}) \quad x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9, \quad x^4 + 2x^2 + 9$$

$$5^{\circ}) \quad x^5 + x + 1, \quad x^2 + x + 1$$

$$6^{\circ}) \quad x^3 - x^2 - x - 2, \quad x^3 - 2x^2 - 2x - 3$$

$$7^{\circ}) \quad x^2 - 5x + 4, \quad x^3 - 5x^2 + 4$$

$$8^{\circ}) \quad 2x^4 - 3x^2y^2 + y^4, \quad 2x^5 - 3x^4y^2 + y^6$$

$$9^{\circ}) \quad x^3 + x + 1, \quad x^4 + x^2 - 1$$

$$10^{\circ}) \quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \quad 2x^3 - 3x^2 - 19x + 30, \quad x^2 - 4x + 3.$$

86. Común múltiplo y mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas enteras.

Se llama *común múltiplo* de varias expresiones algebraicas enteras a toda expresión entera que sea exactamente divisible por cada una de ellas.

Mínimo común múltiplo de varias expresiones enteras es su común múltiplo de menor grado.

Mínimo común múltiplo se escribe, abreviadamente, m. c. m.

Ejemplo. Sean las expresiones

$$8x^3y, \quad -6x^2y^3, \quad x^3 - xy^2 = x(x + y)(x - y).$$

El producto de estas expresiones, a saber,

$$-48x^6y^4(x + y)(x - y)$$

sería un común múltiplo de ellas. Pero no es un común múltiplo del menor grado posible. El mínimo común múltiplo es, en este caso,

$$24x^3y^3(x+y)(x-y)$$

aunque también sería aceptable $-24x^3y^3(x+y)(x-y)$. Por costumbre, se prescinde del signo del coeficiente, esto es, sólo se considera su valor absoluto.

Si se admitiesen como coeficientes números racionales, el m. c. m. de las expresiones dadas se escribiría

$$Cx^3y^3(x+y)(x-y)$$

en donde $C \neq 0$ representa un número racional cualquiera.

En lo que sigue nos limitaremos a considerar el caso de coeficientes enteros.

87. Determinación del mínimo común múltiplo de varios monomios.

Para hallar el m. c. m. de varios monomios basta formar el monomio cuyos factores primos son todos los que figuran en los monomios dados y cuidando de elevar los factores comunes al mayor exponente con que figuren en dichos monomios.

Es claro que el monomio así formado será un múltiplo común de los monomios dados, y será el de menor grado posible, pues si dejásemos de escribir algún factor primo o pusiésemos un exponente menor que el señalado a alguno de los factores primos comunes, el monomio resultante no sería divisible por uno, al menos, de los monomios dados.

Ejemplo.

Hallar el m. c. m. de $25a^3bc^2$, $-40a^2b^2$ y $150abc^3$.

Se tiene:

$$25a^3bc^2 = 5^2a^3bc^2$$

$$-40a^2b^2 = -2^3 \cdot 5a^2b^2$$

$$150abc^3 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2abc^3$$

luego

$$\text{m. c. m.} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2a^3b^2c^3 = 600a^3b^2c^3.$$

EJERCICIO 73.

Hallar el m.c.m. de los monomios siguientes:

1º) $18x^3, 24x^2$

2º) $60a^4, 36a^5$

3º) $15x^2y^3, 50x^3y^2$

4º) $-64xy^4, 24x^2y^3$

5º) $6a^2b^2c^2, -15abc^3$

6º) $14axy, -21bxz^2$

7º) $xy^2z, -x^2yz^2, x^2yz^3$

8º) $12a^2b, 30ab^2, 6a^2b^3$

9º) $10a(x+y)^2, 15a^2(x+y)^3$

10º) $-16a^2(y-z)^3, 12a^1(y-z)^2, 30ab^2(y-z)^4$.

88. Determinación del mínimo común múltiplo de varios polinomios por descomposición en factores.

Cuando los polinomios dados pueden ser descompuestos en sus factores primos, se procede como en el párrafo anterior, formando el producto de los factores primos que figuren en las descomposiciones obtenidas, elevando cada uno al mayor exponente con que aparezca en dichas descomposiciones.

Ejemplo.

Hallar el m. c. m. de $4x^2 - 16$, $3x^2 + 3x - 18$ y $2x^2 + 8x + 8$.

Se tiene:

$$4x^2 - 16 = 4(x^2 - 4) = 4(x + 2)(x - 2)$$

$$3x^2 + 3x - 18 = 3(x^2 + x - 6) = 3(x + 3)(x - 2)$$

$$2x^2 + 8x + 8 = 2(x^2 + 4x + 4) = 2(x + 2)^2$$

Por tanto,

$$\text{m. c. m.} = 12(x + 2)^2(x - 2)(x + 3).$$

EJERCICIO 74.

Hallar el m.c.m. de los polinomios siguientes:

1º) $x^2 - 6x, x^2 - 5x - 6$

2º) $3x^2 - 6x + 3, x^2 + 2x - 3$

3º) $y^3 - 4y, y^3 - 4y^2 + 4y$

4º) $a^2 - 6a + 8, 2a^2 - 7a - 4$

5º) $a^3 - 2a^2x + ax^2, a^2x + ax^2 - 2x^3$

- 6º) $a^3 - 1, a^2 - 1$
 7º) $x^3 - x^2 + x - 1, x^3 + x^2 + x + 1$
 8º) $b^6 - b^3, b^3 + b^2 + b$
 9º) $a^2 - (b + c)^2, b^2 - (a + c)^2$
 10º) $x^3 - y^3, x^4 + x^2y^2 + y^4$
 11º) $x^2 + 2xy + y^2, x^2 - y^2, x^2 - 2xy + y^2$
 12º) $a^2 + 3a, a^3 - 8, a^2 + a - 6$
 13º) $a^2 + ab + 2a + 2b, a^3 + a^2b - ac^2 - bc^2, 3a - 3c$
 14º) $y^2 - x^2, x^3 - y^3, x^4 - y^4$
 15º) $x^2 - 5xy + 6y^2, x^2 - 7xy + 12y^2, x^2 - 6xy + 8y^2$
 16º) $a^4 + 4a^3 - 8a^2 - 24a, a^4 - a^3 + 8a - 8, a^2 + a - 2$
 17º) $a^4 - 10a^2 + 9, (a^2 + 2a - 3)^2$
 18º) $x^4 + x^3y - 2x^2y^2, x^2y^2 + 3xy^3 + 2y^4$
 19º) $2x^3 - 15x^2 + 26x - 5, (2x^2 - 5x + 1)^2$
 20º) $x^5 - x^3, x^6 + x^3, x^4 + x^2 + 1.$

89. Método general para hallar el mínimo común múltiplo de dos expresiones algebraicas enteras.

Cuando las expresiones dadas no están descompuestas en factores, ni es fácil factorizarlas, se puede obtener su m. c. m. aplicando el siguiente

TEOREMA. *El m. c. m. de dos expresiones algebraicas enteras es igual al producto de dichas expresiones dividido por el m. c. d. de las mismas.*

Si representamos por A y B las expresiones dadas, y ponemos

$$\text{m. c. d. (A, B)} = D, \quad \text{m. c. m. (A, B)} = M$$

lo que afirma el teorema es que

$$M = \frac{AB}{D}$$

En efecto, se tiene $A = DA', B = DB'$, en donde A' y B' son factores primos entre sí. Por tanto,

$$M = DA'B' = D \frac{A}{D} \frac{B}{D} = \frac{AB}{D}.$$

El m. c. d. D se halla en general por el método de divisiones sucesivas, como vimos en § 84, o por suma y resta en § 85.

Si se tienen más de dos expresiones, para determinar su m. c. m. se halla el m. c. m. de las dos primeras, luego el m. c. m. del resultado encontrado y la tercera expresión, y así sucesivamente.

Ejemplo.

Hallar el m. c. m. de $x^4 - 2x^2 + 5x - 6$ y $x^4 + 3x - 2$.

Restando un polinomio de otro se encuentra

$$-2x^2 + 2x - 4 = -2(x^2 - x + 2).$$

Es fácil comprobar, haciendo las divisiones correspondientes, que $x^2 - x + 2$ es el m. c. d. de ambos. Se tiene, efectivamente,

$$x^4 - 2x^2 + 5x - 6 = (x^2 - x + 2)(x^2 + x - 3)$$

$$x^4 + 3x - 2 = (x^2 - x + 2)(x^2 + x - 1)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{m. c. m.} &= \frac{(x^4 - 2x^2 + 5x - 6)(x^4 + 3x - 2)}{x^2 - x + 2} \\ &= (x^2 - x + 2)(x^2 + x - 3)(x^2 + x - 1) \end{aligned}$$

Nótese que

$$M = \frac{AB}{D} = A'B = AB' = DA'B'.$$

En la práctica se usa cualquiera de estas diversas formas de expresar M. Así, en el ejemplo anterior, puesto que

$$(x^4 + 3x - 2) : (x^2 - x + 2) = x^2 + x - 1 = B'$$

se tiene

$$\begin{aligned} M = AB' &= (x^4 - 2x^2 + 5x - 6)(x^2 + x - 1) \\ &= x^6 + x^5 - 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 11x + 6. \end{aligned}$$

EJERCICIO 75.

Hallar el m. c. m. de los polinomios siguientes:

1º) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2$, $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 3$

2º) $x^4 - x^3 + x^2 + 2$, $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 2$

- 3º) $x^4 - 10x^2 + 9x - 2$, $x^4 - 12x^2 + 3x + 2$
 4º) $3x^3 - 4x^2 - x + 2$, $3x^3 - x^2 - x - 1$
 5º) $x^4 + 2x^3 + x^2 + 3$, $x^5 - x^3 + 5x^2 - 4x + 3$
 6º) $x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 10x - 5$, $x^3 - 7x^2 + 15x - 10$
 7º) $x^5 + x + 1$, $x^4 + 2x^2 + x + 2$
 8º) $x^5 + 2x^2 - x + 1$, $x^6 + x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$
 9º) $x^3 - 5x^2 + 6$, $x^3 - 7x^2 + 12x - 6$, $2x^3 - 13x^2 + 18x - 6$
 10º) $3x^3 - 8x^2 + 1$, $x^3 - 5x^2 + 7x - 2$, $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$.

EJERCICIO 76. (REPASO).

Hallar el m.c.d. y el m.c.m. de las expresiones algebraicas siguientes:

- 1º) $48a^3bc^2$, $-30ab^2$, $72a^2b^3c^3$
 2º) $20abx$, $50a^2by$, $-75a^2bx$
 3º) $-15m^2n^3s$, $-20m^3n^2t$, $45m^4n^3t^2$
 4º) $8x(a+b)^3$, $-6xy(a+b)^2$, $12x^2y(a+b)$
 5º) $3a^2(2x-y)$, $9b^2(2x-y)^2$, $15ab(2x-y)^3$
 6º) $x^5 - x$, $x^5 - 2x^3 + x$
 7º) $x^2 + x - 6$, $x^2 - x - 12$, $x^2 + 2x - 3$
 8º) $x^3 - 5x^2 - 7x + 14$, $x^3 - 10x^2 + 28x - 21$
 9º) $x^3 + x + 1$, $x^3 - x^2 + 1$
 10º) $x^5 - xy^4$, $x^9 + x^8y$, $x^4 + y^4 - 2x^2y^2$
 11º) $x^2 - 6xy + 8y^2$, $x^2 - 7xy + 12y^2$, $2x^2 - 9xy + 4y^2$
 12º) $a^3 - 4a^2 + 4a$, $4a^2 - a^4$, $a^6 - 8a^3$
 13º) $x^2 - 4y^2 + 12yz - 9z^2$, $x^2 + 2xz - 4y^2 + 8yz - 3z^2$
 14º) $3x^2 + 11xy - 4y^2$, $2x^2 + 11xy + 12y^2$, $(x+4y)^2$
 15º) $2x^3 - 7x^2 + 2$, $x^3 - 2x^2 - 6x + 4$
 16º) $3x^3 + 20x^2 - 8$, $x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 2x - 4$
 17º) $y^4 - 8y^3 + y^2 + 9$, $y^4 - 7y^3 - 7y^2 + 18$
 18º) $4x^3 - 12x^2 + 5x + 6$, $12x^4 - 40x^3 + 27x^2 + 13x - 6$
 19º) $x^7 - x$, $x^5 + x^2$, $(x^3 - x^2 + x)^2$
 20º) $x^5 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$, $x^6 - x^4 + 2x^3 + 1$

TEST 9.

1º) Dados los monomios $12a^2bc^2$, $-30a^3b^2c$ y $60a^4b^3c^2$ indicar cuál de los siguientes es su m.c.d. y cuál es su m.c.m.:

- | | |
|---------------|---------------------|
| a) $3abc$, | b) $120a^4b^3c^2$, |
| c) $6a^2bc$, | d) $60a^4b^3c^2$. |

a) $(x-3)^2$ b) $x-3$,
c) $x(x-3)$, d) $x(x-3)(x+3)(x+4)$,
e) $x(x-3)^2(x+3)(x+4)$.

a) un común divisor, b) el m. c. d.,
c) un común múltiplo, d) el m. c. m.

$$x^6 - x^2, \quad x^5 + 2x^3 + x, \quad x^3 - x^2 + x - 1.$$
$$x^3 - 1, \quad (x^2 + x + 1)^2, \quad x^4 + x^2 + 1.$$
 $x^2 + 4x, \quad x^3 + 64, \quad 2x^3 + 16x^2 + 32x.$
$$2a^2 - ab - 3b^2, \quad 6a^2 - 5ab - 6b^2, \quad 4a^2 - 9b^2.$$

a) $x^2 - (y - z)^2$, $z^2 - (x - y)^2$
 b) $x^3 - 7x^2 + 8x - 2$, $x^3 - 4x^2 - 10x + 4$
 c) $x^3 + 2x^2 - 3$, $x^4 - 5x^2 - 6x + 3$.

CAPÍTULO 10.

FRACCIONES ALGEBRAICAS.

90. Definiciones.

Si A y B son dos expresiones algebraicas y $B \neq 0$, el cociente indicado

$$\frac{A}{B} \quad \text{ó} \quad A/B$$

recibe el nombre de *fracción algebraica*, o de *fracción simple*.

La expresión A es el *numerador* de la fracción y la expresión B es el *denominador*. Ambas reciben el nombre de *términos* de la fracción.

Cuando tanto A como B son expresiones algebraicas racionales*, la fracción A/B se dice que es *racional*. En este capítulo sólo nos ocuparemos de las fracciones algebraicas racionales.

Cuando ambos términos A y B son expresiones algebraicas enteras la fracción A/B se llama *simple*. Si A ó B , o ambos, son expresiones fraccionarias, la fracción A/B se llama *compleja*.

Ejemplo. Consideremos las dos fracciones

$$\frac{x+1}{x^2+4} \quad \text{y} \quad \frac{2+\frac{3}{x-1}}{\frac{x+2}{x-1}}$$

La primera es simple; y la segunda, compleja.

En este capítulo veremos que toda fracción algebraica racional puede reducirse al cociente indicado de dos polinomios. En general, no existe un polinomio que exprese exactamente el cociente

* Recordaremos que en el § 34 llamamos expresión algebraica racional a toda combinación de números y letras, o de letras solamente, mediante las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y elevación a potencia.

de estos dos polinomios numerador y denominador, por lo que la fracción algebraica debe interpretarse como una expresión que indica que para cada sistema de valores numéricos de las letras que en ella figuran, se debe hallar el cociente de los valores numéricos del numerador y del denominador.

Cabe también interpretar una fracción algebraica como un par ordenado de expresiones algebraicas sujeto a ciertas reglas operatorias.

91. Principios fundamentales.

91-1. Puesto que la fracción A/B es el cociente indicado de A por B , se tiene:

$$\frac{A}{B} \cdot B = A.$$

91-2. $\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}$ si $C \neq 0$. En efecto, multiplicando la primera fracción por BC se obtiene

$$\frac{A}{B} \cdot BC = \left(\frac{A}{B} \cdot B \right) C = AC$$

y multiplicando la segunda fracción por BC se obtiene

$$\frac{AC}{BC} \cdot BC = AC$$

que es el mismo resultado anterior. Tenemos pues

$$\frac{A}{B} \cdot BC = \frac{AC}{BC} \cdot BC$$

y por la ley de cancelación del producto 7-2 resulta

$$\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}.$$

Esta propiedad significa que si a las letras que intervienen en las expresiones algebraicas A , B y C damos valores numéricos cualesquiera tales que $B \neq 0$ y $C \neq 0$, el valor numérico del cociente A/B es el mismo valor numérico del cociente AC/BC .

La propiedad anterior se usa frecuentemente, invirtiendo la igualdad, en la forma

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

La operación que consiste en pasar de la primera fracción a la segunda, dividiendo ambos términos por C, se llama *reducción* o *simplificación* de la fracción.

En resumen: *Se puede multiplicar o dividir ambos términos de una fracción algebraica por el mismo factor C. La fracción resultante es equivalente a la dada (toma los mismos valores que ella) para todo sistema de valores de las letras que den para C un valor numérico determinado distinto de cero.*

91-3.

En una fracción se deben considerar tres signos: el signo del numerador, el signo del denominador y el signo propio de la fracción, que se antepone a la raya.

Ejemplos.

$$-\frac{+x}{-y}, \quad +\frac{-m}{+(a-b)}.$$

Cuando no se escribe signo alguno se sobrentiende el signo +.

En virtud de la ley de los signos del cociente, § 16-2, se pueden cambiar libremente dos de estos signos sin que el valor numérico de la fracción varíe. Así, por ejemplo,

$$-\frac{+x}{-y} = -\frac{-x}{+y} = +\frac{-x}{-y} = +\frac{+x}{+y}.$$

En los párrafos siguientes sólo nos ocuparemos de las fracciones simples. En el § 99 trataremos sobre las fracciones complejas.

92. Simplificación de fracciones.

A continuación aplicaremos el principio 91-2 a varios ejemplos de reducción o simplificación de fracciones.

Una fracción se dice que está reducida a su *más simple expresi-*

ción cuando el numerador y el denominador son primos entre sí, esto es, cuando no tienen factor común alguno.

Para reducir una fracción a su más simple expresión basta dividir el numerador y el denominador de la fracción por su máximo común divisor.

Ejemplos.

$$1. \quad \frac{21a^3b^3c^2}{28a^2b^4c^2} = \frac{3a}{4b}$$

$$2. \quad \frac{a^2 - 4}{a^3 - 8} = \frac{(a + 2)(a - 2)}{(a - 2)(a^2 + 2a + 4)} = \frac{a + 2}{a^2 + 2a + 4}$$

$$3. \quad \frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 5)}{(x - 2)(2x + 1)} = \frac{x + 5}{2x + 1}$$

$$4. \quad \frac{x^3 - x^2 + 2}{x^4 - x^3 + x^2 + 2}$$

Como en este caso la factorización de los términos de la fracción no es inmediata, es preferible determinar su m. c. d. por divisiones sucesivas o por adición y sustracción. Empleando este último método tendríamos, restando un polinomio de otro:

$$\begin{aligned} (x^4 - x^3 + x^2 + 2) - (x^3 - x^2 + 2) &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 = \\ &= x^2(x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$(x^3 - x^2 + 2) : (x^2 - 2x + 2) = x + 1$$

$$(x^4 - x^3 + x^2 + 2) : (x^2 - 2x + 2) = x^2 + x + 1$$

luego

$$\text{m. c. d.} = x^2 - 2x + 2.$$

Por tanto,

$$\frac{x^3 - x^2 + 2}{x^4 - x^3 + x^2 + 2} = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

En este ejemplo se podía haber encontrado por división sintética (véase § 78):

$$x^3 - x^2 + 2 = (x + 1)(x^2 - 2x + 2)$$

y notando que $x + 1$ no es un factor del denominador, se procede a ensayar la división por el otro factor $x^2 - 2x + 2$.

Como hemos visto, los factores comunes pueden eliminarse de ambos términos de una fracción y simplificar ésta. Pero sumandos o términos comunes no pueden en general eliminarse sin alterar la fracción. Por ejemplo,

$$\frac{x+a}{x+b} \neq \frac{a}{b}.$$

Compruébese sustituyendo $x = 2$, $a = 3$, $b = 4$.

Tachar o simplificar un sumando con otro es uno de los errores en que más frecuentemente caen los principiantes.

EJERCICIO 77.

Reducir las fracciones siguientes a su más simple expresión:

$$1^\circ) \frac{6a^3b^2}{15ab^4}$$

$$2^\circ) \frac{8a^4b^3c^2}{12a^6b^3c}$$

$$3^\circ) \frac{35x^2y^3z^2}{56xyz^4}$$

$$4^\circ) \frac{-16m^3n^4p^6}{40m^4n^3p^5}$$

$$5^\circ) \frac{72a^6x^3y^4}{-96b^3x^2y^3}$$

$$6^\circ) \frac{-63p^8q^7t^4}{-54p^5q^9t^2}$$

$$7^\circ) \frac{91abc^6}{39a^2b^6c^5}$$

$$8^\circ) \frac{100x^ny^{n+2}z^3}{150x^ny^{n+1}z^2}$$

$$9^\circ) \frac{a^6(b-c)^4}{a^3(b-c)^6}$$

$$10^\circ) \frac{x^5(y+z)^3}{x^6(y+z)^4}$$

$$11^\circ) \frac{5ac-bc}{25a^2-b^2}$$

$$12^\circ) \frac{x^3y-x^2y^2}{2x^2y^2-2xy^3}$$

$$13^\circ) \frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$$

$$14^\circ) \frac{9ab-12b^2}{15a^2-20ab}$$

$$15^\circ) \frac{ax-bx}{b^2-a^2}$$

$$16^\circ) \frac{4x^2+8x}{x^2+4x+4}$$

$$17^\circ) \frac{(2x+y)(9z^2-a^2)}{(3z-a)(4x^2-y^2)}$$

$$18^\circ) \frac{a^5b^6-9a^3b^5}{a^3b^2-3a^2b^3}$$

$$19^{\circ}) \quad \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$$

$$20^{\circ}) \quad \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 11x + 30}$$

$$21^{\circ}) \quad \frac{3x^2 + 26x + 35}{2x^2 + 17x + 21}$$

$$22^{\circ}) \quad \frac{x^4 - x^3 + 6x - 6}{x^3 - 1}$$

$$23^{\circ}) \quad \frac{x^4 - x^2 - 12}{x^4 - 16}$$

$$24^{\circ}) \quad \frac{a^3 - b^3}{a^4 + a^2b^2 + b^4}$$

$$25^{\circ}) \quad \frac{(a^4 - b^4)(a^3 - b^3)}{(a - b)(a^6 - b^6)}$$

$$26^{\circ}) \quad \frac{(x - a)^2 - 1}{(a - 1)^2 - x^2}$$

$$27^{\circ}) \quad \frac{(x + 1)^2 - y^2}{x^2 - (y + 1)^2}$$

$$28^{\circ}) \quad \frac{(a + b)^2 - (1 + b)^2}{a^2 - 1}$$

$$29^{\circ}) \quad \frac{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac}{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}$$

$$30^{\circ}) \quad \frac{(x + y)^2 - (m + n)^2}{(m + x)^2 - (n + y)^2}$$

$$31^{\circ}) \quad \frac{2y^2 + xy - x^2}{x^2 - 3xy + 2y^2}$$

$$32^{\circ}) \quad \frac{5x^2 - 3x - 2}{x^3 + x^2 + 3x - 5}$$

$$33^{\circ}) \quad \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 2x^2 - 11x - 12}$$

$$34^{\circ}) \quad \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 + 4x^2 + 4x + 3}$$

$$35^{\circ}) \quad \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}$$

$$36^{\circ}) \quad \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$$

$$37^{\circ}) \quad \frac{a^3 - 4a^2 + 5}{a^4 - 3a^3 - 3a^2 + 10}$$

$$38^{\circ}) \quad \frac{b^3 + b^2 - 10b - 12}{b^3 - 8b - 8}$$

$$39^{\circ}) \quad \frac{x^3 - x^2 + 12}{x^4 - 4x^3 + 21x - 54}$$

$$40^{\circ}) \quad \frac{x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 16}{x^4 + 5x^3 + 8x - 32}$$

93. Reducción de fracciones al mínimo común denominador.

La suma de fracciones algebraicas requiere, como la suma de fracciones aritméticas ordinarias, que éstas tengan el mismo denominador. En caso contrario, es preciso convertir primero las fracciones en otras equivalentes que tengan un denominador común. Con objeto de abreviar los cálculos es conveniente que el denominador común sea el de menor grado posible. Esto es lo que se llama el *mínimo común denominador* de las fracciones dadas.

Para reducir varias fracciones (simplificadas) al mínimo común denominador, basta aplicar la siguiente regla, que es análoga a la que se utiliza en Aritmética en el caso correspondiente de fracciones ordinarias.

REGLA. 1º) Hállese el m. c. m. de los denominadores de las fracciones dadas. Este será el mínimo común denominador.

2º) Multiplíquese el numerador y el denominador de cada fracción por el factor o factores necesarios para que cada denominador sea igual al m. c. m. de los denominadores.

Estos factores se hallan por inspección o dividiendo mentalmente el m. c. m. de los denominadores por el denominador correspondiente.

Ejemplos.

1. Reducir $\frac{2a}{3x}$, $\frac{3b}{4x^2}$ y $\frac{c}{8x^3}$ al mínimo común denominador.

El m. c. m. de los denominadores es $24x^3$. Dividiendo sucesivamente $24x^3$ por los denominadores de las fracciones dadas se encuentran en orden los cocientes $8x^2$, $6x$, 3 que son respectivamente los factores por los que hay que multiplicar ambos términos de cada fracción para convertirlas en fracciones de denominador común igual a $24x^3$. Efectuando las multiplicaciones correspondientes se obtiene:

$$\frac{16ax^2}{24x^3}, \quad \frac{18bx}{24x^3}, \quad \frac{3c}{24x^3}$$

2. Reducir $\frac{x}{x^2 + x - 6}$, $\frac{3}{x^2 - 4}$ al mínimo común denominador.

Puesto que

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

el m. c. m. de los denominadores es

$$\text{m. c. m.} = (x + 3)(x + 2)(x - 2).$$

Introduciendo en ambos términos de la primera fracción el factor $x + 2$ y en ambos términos de la segunda el factor $x + 3$ resulta:

$$\frac{x}{(x+3)(x-2)} = \frac{x(x+2)}{(x+3)(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{3}{(x+2)(x-2)} = \frac{3(x+3)}{(x+3)(x+2)(x-2)}$$

EJERCICIO 78.

Reducir las fracciones siguientes al mínimo común denominador:

1º) $\frac{2}{ab}, \frac{3}{bc}$

2º) $\frac{x}{a^2b}, \frac{y}{ab^2}$

3º) $\frac{5}{xy^2}, \frac{a}{xy}, \frac{b}{x^2}$

4º) $\frac{a-b}{4a}, \frac{a+b}{6ab}$

5º) $\frac{a}{6x^2}, \frac{bc}{8x}, \frac{1}{3xy}$

6º) $\frac{1}{ax^2}, \frac{2}{a^3x}, \frac{3}{a^2x^2}$

7º) $\frac{x+y}{3x^3y^4}, \frac{2}{xy^3}, \frac{-3}{xy^5}$

8º) $\frac{xy}{abc}, \frac{yz}{a^2c}, \frac{xz}{b^2c^3}$

9º) $\frac{2}{x+1}, \frac{3}{x-2}$

10º) $\frac{1}{a-1}, \frac{2}{a^2-1}$

11º) $\frac{3}{x-3}, \frac{1}{2x-6}$

12º) $\frac{a}{a^2-x^2}, \frac{x}{a+x}$

13º) $\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1+x}, \frac{x^2}{1-x^2}$

14º) $\frac{a}{a+1}, \frac{1}{(a+1)^2}, \frac{a^2}{(a+1)^3}$

15º) $\frac{1}{x^2-7x+12}, \frac{1}{x^2-5x+4}$

16º) $\frac{1}{x^2-9}, \frac{2}{x^2-4x+3}$

17º) $\frac{1}{x-3y}, \frac{1}{x^2+3xy-18y^2}, \frac{1}{x+6y}$

18º) $\frac{1}{(a-b)(b-c)}, \frac{2}{(b-c)(c-a)}, \frac{3}{(a-c)(b-a)}$

19º) $\frac{a}{x^2y-x}, \frac{b}{xy^2-y}, \frac{c}{(xy-1)^2}$

$$20^{\circ}) \quad \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{x+y}{x-y}, \frac{2}{x^3-y^3}$$

94. Adición y sustracción de fracciones.

Puesto que las fracciones algebraicas se reducen a fracciones numéricas para cada sistema de valores de las letras que contienen, se definen las operaciones con fracciones algebraicas del mismo modo que se hace en Aritmética para las fracciones ordinarias. La terminología y notación de las operaciones es también la misma.

De ahí que para sumar o restar fracciones algebraicas se aplique la siguiente

REGLA. *La suma algebraica de varias fracciones de igual denominador es otra fracción cuyo denominador es el mismo y cuyo numerador es la correspondiente suma algebraica de los numeradores.*

Si las fracciones tienen denominadores diferentes se comienza por reducirlas a un común denominador (preferiblemente al mínimo común denominador) y se procede como en el caso anterior.

Se acostumbra dar el resultado en forma simplificada siempre que la reducción a una expresión más simple sea posible (véase más adelante el ejemplo 5).

Ejemplos.

$$1. \quad \frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a - b + c}{m}$$

$$2. \quad \frac{3}{x-a} + \frac{2}{a-x} = \frac{3}{x-a} - \frac{2}{x-a} = \frac{3-2}{x-a} = \frac{1}{x-a}.$$

En este ejemplo los denominadores difieren sólo en signo, por lo que hemos comenzado por cambiar el signo del denominador de la segunda fracción (escribiendo $x-a$ en vez de $a-x$), cuidando al mismo tiempo de cambiar el signo de la fracción (el que se escribe enfrente de la raya).

$$3. \quad \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} - \frac{c}{ab} = \frac{a^2}{abc} + \frac{b^2}{abc} - \frac{c^2}{abc} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{abc}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & \frac{x-3}{6} - \frac{x+2}{9} + \frac{2x-1}{3} - \frac{2x-3}{12} = \\
 & = \frac{6x-18}{36} - \frac{4x+8}{36} + \frac{24x-12}{36} - \frac{6x-9}{36} = \\
 & = \frac{(6x-18) - (4x+8) + (24x-12) - (6x-9)}{36} = \\
 & = \frac{6x-18-4x-8+24x-12-6x+9}{36} = \\
 & = \frac{20x-29}{36}.
 \end{aligned}$$

Con un poco de práctica pueden suprimirse los dos primeros pasos intermedios, pero al principio conviene no omitirlos para evitar equivocaciones. Un error en que se incurre a menudo consiste en restar incorrectamente los numeradores. Así, en el caso anterior, al restar el numerador de la última fracción hay tendencia a escribir $-6x-9$ en vez de $-6x+9$, lo que se evita escribiéndolos primero encerrados en paréntesis, como hicimos arriba.

La raya de quebrado puede considerarse en lo que respecta al numerador como equivalente a un vínculo o un paréntesis.

$$\begin{aligned}
 5. \quad & \frac{1}{x+2a} + \frac{1}{x-2a} - \frac{4a}{x^2-4a^2} = \\
 & = \frac{x-2a}{x^2-4a^2} + \frac{x+2a}{x^2-4a^2} - \frac{4a}{x^2-4a^2} = \\
 & = \frac{x-2a+x+2a-4a}{x^2-4a^2} = \\
 & = \frac{2x-4a}{x^2-4a^2} = \frac{2(x-2a)}{(x+2a)(x-2a)} = \frac{2}{x+2a}.
 \end{aligned}$$

VERIFICACIÓN. Hagamos $x=3$, $a=1$. Las fracciones dadas toman respectivamente los valores $1/5$, 1 , $4/5$, y se tiene

$$\frac{1}{5} + 1 - \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

que es el valor numérico que toma la fracción suma $2/(x+2a)$ para $x=3$, $a=1$.

$$6. \quad \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(x-2)(3-x)} + \frac{3}{(x-1)(x-3)}.$$

En este ejemplo conviene cambiar el signo del segundo paréntesis en la fracción intermedia, escribiendo $x-3$ en vez de $3-x$, ya que el factor $x-3$ aparece en el denominador de la tercera fracción. Como cambiar de signo a un factor equivale a cambiar de signo al producto, modificaremos el signo de la raya de la segunda fracción y pondremos $-$. En consecuencia, el ejemplo propuesto se escribe

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{2}{(x-2)(x-3)} + \frac{3}{(x-1)(x-3)} = \\ & = \frac{x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)} - \frac{2(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)} + \\ & \quad + \frac{3(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \\ & = \frac{(x-3) - 2(x-1) + 3(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \\ & = \frac{x-3-2x+2+3x-6}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \\ & = \frac{2x-7}{(x-1)(x-2)(x-3)} \end{aligned}$$

$$7. \quad \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

A veces no conviene sumar al mismo tiempo todas las fracciones. Asociándolas convenientemente se economiza mucho trabajo en algunos ejemplos. Así, en el caso anterior procederemos de la siguiente manera:

$$17^{\circ}) \quad \frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y} + \frac{xy}{x^2-y^2}$$

$$18^{\circ}) \quad \frac{x-y}{x} - \frac{2y}{x-y} - \frac{y^3}{x(x^2-y^2)}$$

$$19^{\circ}) \quad \frac{1}{x+1} + \frac{x-4}{x^2-x+1} - \frac{x^2-3x+2}{x^3+1}$$

$$20^{\circ}) \quad \frac{1-t}{1-t+t^2} - \frac{1+t}{1+t+t^2}$$

$$21^{\circ}) \quad \frac{3}{m^2-3m+2} + \frac{2}{m^2-4m+3} - \frac{2}{m^2-5m+6}$$

$$22^{\circ}) \quad \frac{4}{x^2-13x+42} + \frac{3}{15x-x^2-56} - \frac{5}{x^2-14x+48}$$

$$23^{\circ}) \quad \frac{x-y}{y} + \frac{4x}{x-y} + \frac{x^3+3x^2y}{y^3-x^2y}$$

$$24^{\circ}) \quad \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x+3} + \frac{3}{x-3} - \frac{1}{x-1}$$

$$25^{\circ}) \quad \frac{1}{x+a} - \frac{3}{x+3a} + \frac{3}{x+5a} - \frac{1}{x+7a}$$

$$26^{\circ}) \quad \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}$$

$$27^{\circ}) \quad \frac{x+3}{(x-1)(x-2)} - \frac{x+1}{(2-x)(x-3)} + \frac{x+2}{(x-3)(1-x)}$$

$$28^{\circ}) \quad \frac{2x+3}{x^3+2x^2-9x-18} - \frac{2x-1}{x^3+3x^2-4x-12}$$

$$29^{\circ}) \quad \frac{m+n}{2m+2n+4} - \frac{2}{m^2+2mn+2m+2n+n^2}$$

$$30^{\circ}) \quad \frac{a+c}{(a-b)(a-c)} - \frac{b+c}{(c-a)(b-a)} + \frac{a+b}{(c-b)(a-c)}$$

$$31^{\circ}) \quad \frac{1}{(x-y)(y-z)} - \frac{2}{(y-z)(z-x)} + \frac{3}{(x-z)(y-x)}$$

$$32^{\circ}) \quad \frac{bc}{(a-c)(a-b)} + \frac{ac}{(b-c)(b-a)} - \frac{ab}{(a-c)(c-b)}$$

$$33^{\circ}) \quad \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

$$\begin{aligned}
 34^\circ) & \frac{1}{a(a-b)(a-c)} - \frac{1}{b(a-b)(b-c)} - \frac{1}{abc} \\
 35^\circ) & \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \\
 36^\circ) & \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} \\
 37^\circ) & \frac{a^2-b}{(a-b)(a-1)} + \frac{a+b^2}{(b-a)(b+1)} - \frac{ab+1}{(a-1)(b+1)} \\
 38^\circ) & \frac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2} + \frac{b^2-(a-c)^2}{(a+b)^2-c^2} + \frac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2} \\
 39^\circ) & \frac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)} \\
 40^\circ) & \frac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2-xz}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}
 \end{aligned}$$

95. Expresiones mixtas. Reducción de expresiones mixtas a fracciones y viceversa.

Se llama *expresión mixta* a la suma algebraica de una expresión entera y una fraccionaria.

Ejemplos. Son expresiones mixtas las siguientes:

$$x + 1 + \frac{2}{x}, \quad a^2 + b^2 - \frac{b^3}{a+b}.$$

95-1. Reducción de una expresión mixta a fraccionaria.

Para reducir una expresión mixta a fraccionaria basta efectuar la suma algebraica indicada, escribiendo 1 como denominador de la parte entera.

Ejemplos.

$$\begin{aligned}
 1. \quad a^2 + ab + b^2 + \frac{b^3}{a-b} &= \frac{a^2 + ab + b^2}{1} + \frac{b^3}{a-b} \\
 &= \frac{(a^2 + ab + b^2)(a-b) + b^3}{a-b} = \frac{a^3 - b^3 + b^3}{a-b} = \frac{a^3}{a-b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad x - y - \frac{x^2 + y^2}{x + y} &= \frac{x - y}{1} - \frac{x^2 + y^2}{x + y} \\
 &= \frac{(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)}{x + y} = \frac{-2y^2}{x + y}.
 \end{aligned}$$

$$3. \quad \frac{(x + 3a)^2}{6ax} - 2 = \frac{(x + 3a)^2 - 12ax}{6ax} = \frac{(x - 3a)^2}{6ax}.$$

Puesto que en general se tiene

$$A + \frac{B}{C} = \frac{A}{1} + \frac{B}{C} = \frac{AC + B}{C}$$

puede usarse también la siguiente regla para reducir una expresión mixta a fraccionaria:

Al producto de la parte entera por el denominador súmesele (algebraicamente) el numerador y divídase por el mismo denominador.

Esta regla es análoga a la que se da en Aritmética para reducir un número mixto a quebrado.

95-2. Reducción de una expresión fraccionaria a otra mixta.

Si en una fracción algebraica el grado del numerador (con respecto a alguna de las letras que contiene) es mayor o igual que el grado del denominador (con respecto a la misma letra) basta dividir el numerador por el denominador para reducir la fracción a forma entera (cuando la división es exacta) o a forma mixta (cuando es inexacta), como vimos en § 58 al estudiar lo que llamamos cociente completo. El cociente completo es igual al cociente entero más una fracción cuyo numerador es el resto de la división y cuyo denominador es el divisor.

Ejemplos.

$$1. \quad \text{Reducir a forma entera o mixta: } \frac{3x^2 - 5x + 3}{x - 2}.$$

Efectuando la división indicada se tiene:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 5x + 3 & x - 2 \\ 3x^2 - 6x & 3x + 1 \\ \hline & x + 3 \\ & x - 2 \\ \hline & + 5 \end{array}$$

Por consiguiente,

$$\frac{3x^2 - 5x + 3}{x - 2} = 3x + 1 + \frac{5}{x - 2}$$

2. Reducir a forma entera o mixta: $\frac{a^3 - b^3}{a + b}$.

Tenemos:

$$\begin{array}{r|l} a^3 - b^3 & a + b \\ a^3 + a^2b & a^2 - ab + b^2 \\ \hline & - a^2b \\ & - a^2b - ab^2 \\ \hline & + ab^2 - b^3 \\ & + ab^2 + b^3 \\ \hline & - 2b^3 \end{array}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{a^3 - b^3}{a + b} &= a^2 - ab + b^2 + \frac{-2b^3}{a + b} = \\ &= a^2 - ab + b^2 - \frac{2b^3}{a + b}. \end{aligned}$$

Cuando el resto es negativo generalmente se expresa el resultado en la segunda de las dos formas escritas arriba.

EJERCICIO 80.

Reducir las siguientes expresiones mixtas a forma fraccionaria:

1º) $x + \frac{x}{x - 1}$

2º) $x + 2 + \frac{1 - x^2}{x - 2}$

$$3^{\circ}) \quad x + y + \frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

$$4^{\circ}) \quad a + b - \frac{a^2 + b^2}{a + b}$$

$$5^{\circ}) \quad y - 3 - \frac{y - 1}{y + 1}$$

$$6^{\circ}) \quad \frac{a - 2b}{3} - a + b$$

$$7^{\circ}) \quad x^2 + xy + y^2 + \frac{2y^3}{x - y}$$

$$8^{\circ}) \quad \frac{a^2 + 2ax - x^2}{a + x} + x - a$$

$$9^{\circ}) \quad x - y - \frac{x^2 - xy - y^2}{x - y}$$

$$10^{\circ}) \quad 4 + 2x + x^2 - \frac{8}{2 - x}$$

Reducir las siguientes fracciones a forma entera o mixta:

$$11^{\circ}) \quad \frac{2x^2 - 6x + 5}{x}$$

$$12^{\circ}) \quad \frac{5x^2 + 10x - 8}{5x}$$

$$13^{\circ}) \quad \frac{x^2 - 9x + 3}{x + 1}$$

$$14^{\circ}) \quad \frac{3x^2 + 7x - 8}{x - 2}$$

$$15^{\circ}) \quad \frac{a^3 + b^3}{a - b}$$

$$16^{\circ}) \quad \frac{x^4 - y^4}{x + y}$$

$$17^{\circ}) \quad \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$18^{\circ}) \quad \frac{x^3 + 6x^2 - 5}{x^2 - x + 3}$$

$$19^{\circ}) \quad \frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{a^2 - ab + b^2}$$

$$20^{\circ}) \quad \frac{2x^3 - x^2 - 8x + 4}{x^2 + x - 1}$$

96. Multiplicación de fracciones.

Por definición, el producto de dos o más fracciones algebraicas es otra fracción algebraica cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores de las fracciones dadas. De esta manera, al atribuir valores numéricos a las letras que figuren en estas fracciones, resulta como valor numérico del producto una fracción igual al producto de los valores numéricos de los factores.

En general, pues,

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F} = \frac{ACE}{BDF}, \text{ etc.}$$

Si entre los factores figurase una expresión entera bastará

expresarla como fracción de denominador 1. Si figurase una expresión mixta, se reduce primero a forma fraccionaria, como explicamos en § 95-1.

Con objeto de obtener un resultado ya simplificado, esto es, reducido a su más simple expresión, es conveniente factorizar los numeradores y denominadores de las fracciones dadas (cuando no lo estén ya), eliminando todo factor común a un numerador y a un denominador antes de efectuar las multiplicaciones indicadas. Es claro que la eliminación de un factor común a un numerador y a un denominador antes de multiplicar es más ventajoso, pero equivalente a su eliminación posterior.

Ejemplos.

$$1. \quad \frac{2xy^2}{3a^2z} \cdot \frac{6abx^2}{10yz} \cdot \frac{5az}{4by} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 5 a^2 b x^3 y^2 z}{3 \cdot 10 \cdot 4 a^2 b y^2 z^2} = \frac{x^3}{2z}.$$

$$2. \quad \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + x - 2} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x + 3} =$$

$$= \frac{(x-4)(x+3)}{(x+2)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x+1)} = \frac{x-4}{x+2}.$$

En este ejemplo, antes de efectuar la multiplicación, se han eliminado los factores comunes al numerador y al denominador, a saber: $x+3$, $x-1$ y $x+1$.

Comprobación. Haciendo $x=3$ se obtiene

$$\frac{-6}{10} \cdot \frac{8}{24} = \frac{-1}{5}.$$

EJERCICIO 81.

Efectuar las multiplicaciones indicadas:

$$1^{\circ}) \quad \frac{6a^2b}{5c} \cdot \frac{15abc}{9a^2b^3}$$

$$2^{\circ}) \quad \frac{3xyz}{4ax^2} \cdot \frac{10aby}{6by^2z}$$

$$3^{\circ}) \quad \frac{24m^2n^3}{15mnp} \cdot \frac{20pq}{8mnq}$$

$$4^{\circ}) \quad \frac{21xy^3}{25y^2z^3} \cdot \frac{30x^2z}{14x^3y}$$

$$5^{\circ}) \quad \frac{13a^3x^2}{22b^2y^4} \cdot \frac{33c^2y^3}{39a^2x} \cdot \frac{-6by}{5cx}$$

$$6^{\circ}) \quad \frac{3m^2}{3x^2-6x} \cdot \frac{x^2-4}{m}$$

$$7^{\circ}) \quad \frac{4a^2}{2x+4} \cdot \frac{3x+6}{6a}$$

$$8^{\circ}) \quad \frac{4x^2+4y^2}{2x-2y} \cdot \frac{x^2-y^2}{x+y}$$

$$9^{\circ}) \quad \frac{a^2-1}{a^2-3a+2} \cdot \frac{a^2-4}{a^2+3a+2}$$

$$10^{\circ}) \quad \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \left(1 + \frac{a}{b-a}\right)$$

$$11^{\circ}) \quad \frac{10x^3}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{x^3+y^3}{5x^2}$$

$$12^{\circ}) \quad \frac{x^3+y^3}{x^3-y^3} \cdot \frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$$

$$13^{\circ}) \quad \frac{a-b}{a^2+ab} \cdot \frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2}$$

$$14^{\circ}) \quad \frac{x+a}{x-a} \cdot \frac{x^3-a^3}{x^2-a^2} \cdot \frac{x+a}{x^2+ax+a^2}$$

$$15^{\circ}) \quad \left(\frac{9a^2}{b^2} - 1\right) \left(\frac{6a}{3a-b} - 2\right) \left(\frac{b}{3a+b}\right)$$

$$16^{\circ}) \quad \frac{x^2+3x-4}{x^2+x-12} \cdot \frac{x^2-x-6}{x^2+7x+10} \cdot \frac{x^3+5x^2}{x^2-x}$$

$$17^{\circ}) \quad \frac{a^2+a}{a^2-2a+1} \cdot \frac{a^2-a}{2a+1} \cdot \frac{(a+1)^2-a^2}{a^3-a}$$

$$18^{\circ}) \quad \frac{ab-b^2-bc}{(a+c)^2-b^2} \cdot \frac{a^2-ab+ac}{(a-b)^2-c^2} \cdot \frac{(a+b)^2-c^2}{ac+bc-c^2}$$

$$19^{\circ}) \quad \frac{x^2+y^2-z^2+2xy}{x^2+y^2-z^2+2xy} \cdot \frac{x-y-z}{x+y+z}$$

$$20^{\circ}) \quad \frac{4m^2}{m-1} \cdot \frac{m^4-1}{16m^4-9m^2} \cdot \frac{4m+3}{2m^2+2}$$

$$21^{\circ}) \quad \frac{x^2+2x-15}{x^2+4x-5} \cdot \frac{x^2+11x+18}{x^2-6x-7} \cdot \frac{x^2-8x+7}{x^2+6x-27}$$

$$22^{\circ}) \quad \frac{2x^2-3x-2}{2x^2+3x-2} \cdot \frac{2x^2+x-3}{2x^2+7x+3} \cdot \frac{2x^2+5x-3}{2x^2-x-6}$$

$$23^{\circ}) \quad \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) \left[1 - \frac{x^2+y^2}{(x-y)^2}\right] \frac{x^3-y^3}{(x+y)^2}$$

$$24^{\circ}) \quad \frac{x^2+3x-70}{x^2-100} \cdot \frac{x^2+x-42}{x^2-36} \cdot \frac{x^2+11x+30}{x^2-49}$$

$$25^{\circ}) \quad \frac{9a^2-16}{12a^2-a-20} \cdot \frac{4a^2-1}{6a^2+11a+4} \cdot \frac{16a^2-25}{8a^2-14a+5}$$

$$26^{\circ}) \frac{a^2 + 3a}{a^2 - 4a} \cdot \frac{a^2 - 2a - 8}{a^2 - 2a - 15} \cdot \frac{2a^2 - 7a - 15}{3a^2 + 7a + 2}$$

$$27^{\circ}) \frac{b^2 - 9}{b^2 - 4} \cdot \frac{b^2 - 2b}{b^2 - 3b} \cdot \frac{2b^2 + 3b - 2}{2b^2 + 5b - 3}$$

$$28^{\circ}) \frac{c^2 - 1}{c^2 - 2c} \cdot \frac{c^3 - 1}{c^2 - 2c + 1} \cdot \frac{c^2 + 3c - 10}{c^2 + c + 1}$$

$$29^{\circ}) \left(x - \frac{xy^3 + y^4}{x^3 + y^3} \right) \left(1 - \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - y^2}$$

$$30^{\circ}) \frac{a^2b - ab^2}{a^2 + b^2} \left(1 + \frac{a^2 + b^2}{2ab} \right) \left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} \right)$$

97. Potenciación de fracciones.

Para elevar a potencia una fracción se eleva a dicha potencia el numerador y se divide por la misma potencia del denominador. Esto es:

$$\left(\frac{A}{B} \right)^n = \frac{A^n}{B^n}.$$

Ejemplos.

$$1. \left(\frac{2a}{3b} \right)^3 = \frac{2a}{3b} \cdot \frac{2a}{3b} \cdot \frac{2a}{3b} = \frac{(2a)^3}{(3b)^3} = \frac{8a^3}{27b^3}.$$

$$2. \left(\frac{x-y}{x+y} \right)^2 = \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}.$$

98. División de fracciones.

Invertir una fracción A/B es intercambiar su numerador y denominador obteniendo la nueva fracción B/A . Esta nueva fracción, llamada **inversa** o **recíproca** de la dada es tal que

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{A} = \frac{AB}{BA} = 1.$$

Para dividir una fracción por otra basta multiplicar la fracción dividendo por la fracción recíproca del divisor. En símbolos:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}.$$

En efecto, el resultado hallado satisface la definición general de cociente, es decir, es tal que su producto por el divisor es igual al dividendo:

$$\frac{AD}{BC} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A}{B}.$$

Ejemplos.

$$1. \quad \frac{6x^2y}{5ab^2} : \frac{3x^2y^2}{10a^2b^3} = \frac{6x^2y}{5ab^2} \cdot \frac{10a^2b^3}{3x^2y^2} = \frac{4ab}{y}.$$

$$2. \quad \frac{49x^2y^2 - 1}{3xy + 1} : \frac{1 - 7xy}{9x^2y^2 - 1} =$$

$$= \frac{(7xy - 1)(7xy + 1)}{3xy + 1} \cdot \frac{(3xy + 1)(3xy - 1)}{-(7xy - 1)} =$$

$$= \frac{(7xy + 1)(3xy - 1)}{-1} = 1 + 4xy - 21x^2y^2.$$

$$3. \quad \frac{a^2 - 5a + 6}{a^2 - 9a + 20} : \frac{a^2 - 9a + 18}{a^2 - 11a + 30} \cdot \frac{a^3 - 4a^2}{a^2 - 2a}.$$

Cuando hay multiplicaciones y divisiones combinadas éstas se efectúan en el orden en que se presentan (de izquierda a derecha), como se estableció en § 37, a menos que se inserten paréntesis, en cuyo caso se efectúan primero las operaciones incluidas en paréntesis.

Descomponiendo en factores e invirtiendo la segunda fracción, se obtiene:

$$\frac{(a - 2)(a - 3)}{(a - 4)(a - 5)} \cdot \frac{(a - 5)(a - 6)}{(a - 3)(a - 6)} \cdot \frac{a^2(a - 4)}{a(a - 2)} = a.$$

EJERCICIO 82.

Efectuar:

$$1^o) \quad \frac{12a^3}{7b^2} : \frac{18a^2b}{21b^2c}$$

$$2^o) \quad \frac{8x^2y^3}{9a^2b} : \frac{4x^3y^3}{3a^3b^2}$$

$$\begin{aligned}
 3^\circ) & \frac{25a^3x^2y}{24b^2xz} : \frac{15a^2xy^2}{18byz^2} & 4^\circ) & \frac{10m^3n^4}{27pq^3} : \frac{30amn}{81p^2q^2} \\
 5^\circ) & \frac{8y^3}{11xz^2} \cdot \frac{14x^2y}{5y^2z} : \frac{7y^3z^2}{22mx^3} & 6^\circ) & \frac{4p^2}{15qr^2} : \frac{2xz}{3r^3y} \cdot \frac{5xz^2q}{p^2ry} \\
 7^\circ) & \frac{25ab}{a^2 - c^2} : \frac{10bc}{a + c} & 8^\circ) & \frac{3a^2}{a^3 - b^3} : \frac{a}{a - b} \\
 9^\circ) & \frac{x^4 - a^4}{(x - a)^2} : \frac{x^2 + ax}{x - a} & 10^\circ) & \frac{x^2 - 81}{x^2 + 3x} : \frac{x^2 + 9x}{x^2 - 9} \\
 11^\circ) & \frac{x^2 - 25}{x^2 - 16} \cdot \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + x - 12} \\
 12^\circ) & \frac{c^2 - (a + b)^2}{c^2 - (a - b)^2} \cdot \frac{(a + b)^2 - c^2}{a^2 - (b - c)^2} \\
 13^\circ) & \frac{h^3 + 1}{h^2 - h} : \frac{h^3 - h^2 + h}{h^2 - 2h + 1} \\
 14^\circ) & \frac{a^2 - 2bc - b^2 - c^2}{a^2 - c^2 - b^2 + 2bc} : \frac{a + b + c}{a - b + c} \\
 15^\circ) & \frac{a^2 - 4a - 5}{a^2 + 2a - 8} : \frac{a^2 - 3a - 10}{a^2 + a - 12} : \frac{a^2 - 2a - 3}{a^2 - 4} \\
 16^\circ) & \frac{a^2b^2 + 2a^2}{b^4 + b^3} : \frac{b^4 - 7b^2 - 18}{b^4 - 4b^2 + 3} : \frac{a^2b^4 - 2a^2b^2 - 3a^2}{b^4 - 8b^2 - 9} \\
 17^\circ) & \frac{x^3 - xy^2}{x^3 + y^3} \cdot \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - xy} : \frac{x^2 + 2xy + 4y^2}{x^3 - 8y^3} \\
 18^\circ) & \frac{x^6 + 64}{(x^2 + 4)^3} \cdot \frac{2x^6 + 16x^4 + 32x^2}{6x^4 + 6x^2} : \frac{x^4 - 4x^2 + 16}{3a(x^2 + 1)} \\
 19^\circ) & \left(3 - \frac{4b + 20a}{2b + 5a} \right) : \left(4 - \frac{16a}{b} + \frac{15a^2}{b^2} \right) \cdot \left(\frac{4a}{b} + 4 - \frac{15a^2}{b^2} \right) \\
 20^\circ) & \left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right) : \left[\left(\frac{1+x}{1-x} - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) \right]
 \end{aligned}$$

99. Fracciones complejas.

Ya dijimos al comienzo de este capítulo que una fracción A/B se dice *compleja* cuando el numerador, el denominador, o ambos, son expresiones fraccionarias.

Ejemplos. Es compleja la fracción

$$\frac{\frac{x}{x-1} - 1}{1 + \frac{x}{1-x}}$$

Las fracciones complejas de la forma

$$\frac{a}{b + \frac{c}{d + \frac{e}{f}}}$$

se llaman *fracciones continuas*.

Puesto que la suma, diferencia, producto y cociente de dos fracciones simples se expresa por una fracción simple, toda fracción compleja es reducible a una fracción simple sin más que efectuar las operaciones indicadas.

Por regla general lo que se hace es realizar las operaciones indicadas en el numerador y en el denominador separadamente y luego dividir el primer resultado por el segundo. Sin embargo, a veces es más breve multiplicar ambos términos de la fracción compleja por el m. c. m. de los denominadores de las fracciones simples que figuran en ella.

Ejemplos.

1. Sea la misma fracción compleja escrita anteriormente

$$\frac{\frac{x}{x-1} - 1}{1 + \frac{x}{1-x}}$$

Efectuando la operación indicada en el numerador:

$$\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{x - (x-1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

Haciendo lo mismo con el denominador:

$$1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1-x+x}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

Dividiendo un resultado por otro:

$$\frac{1}{x-1} : \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{-1} = -1.$$

Otro método. Multiplicando ambos términos de la fracción compleja por $x-1$ se obtiene, sucesivamente:

$$\frac{\frac{x}{x-1} - 1}{1 + \frac{x}{1-x}} = \frac{x - (x-1)}{(x-1) - x} = \frac{1}{-1} = -1.$$

$$2. \quad \frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b}}$$

Multiplicando ambos términos de la fracción compleja por $(a+b)(a-b)$, que es el m. c. m. de los denominadores de las fracciones simples que aparecen en ella, se obtiene:

$$\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{a(a+b) - a(a-b)} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{a^2 + ab - a^2 + ab} = \frac{4ab}{2ab} = 2.$$

$$3. \quad \text{Sea la fracción continua } \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x+1}}}.$$

Estas fracciones se reducen haciendo operaciones de abajo arriba, esto es, comenzando por la operación indicada en el penúltimo, denominador, a saber:

$$1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$$

EJERCICIO 83.

Simplificar:

$$1^{\circ}) \frac{x - \frac{4}{x}}{x + 2}$$

$$2^{\circ}) \frac{x - \frac{3}{y}}{y - \frac{3}{x}}$$

$$3^{\circ}) \frac{\frac{xy}{z} - 2m}{2z - \frac{xy}{m}}$$

$$4^{\circ}) \frac{1 - \frac{b}{a+b}}{1 + \frac{b}{a-b}}$$

$$5^{\circ}) \frac{a + \frac{ab}{a-b}}{a - \frac{ab}{a+b}}$$

$$6^{\circ}) \frac{\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}}{\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}}$$

$$7^{\circ}) \frac{a + \frac{ab}{a-b}}{\frac{a^2}{a^2 - b^2} - 1}$$

$$8^{\circ}) \frac{\frac{x^3 - y^3}{x+y}}{x^2 + xy + y^2}$$

$$9^{\circ}) \frac{x}{1 - \frac{1-x}{1+x}}$$

$$10^{\circ}) \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}}$$

$$11^{\circ}) \frac{\frac{1}{a+b} - \frac{c}{(a+b)(a+c)}}{\frac{1}{a+c} - \frac{b}{(a+b)(a+c)}}$$

$$12^{\circ}) \frac{\frac{x+2}{x} + \frac{x-2}{2}}{\frac{x+2}{2} - \frac{x-2}{x}}$$

$$13^{\circ}) \frac{\frac{x}{1+x} + \frac{1-x}{x}}{\frac{x}{1+x} - \frac{1-x}{x}}$$

$$14^{\circ}) \frac{\frac{x-3}{x-5} - \frac{x-5}{x-3}}{\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3}}$$

$$15^{\circ}) \frac{\frac{x}{c-x} + \frac{x}{c+x}}{\frac{c}{c-x} - \frac{c}{c+x}}$$

$$16^{\circ}) \frac{\frac{x}{x-a} + \frac{a}{x+a}}{\frac{x}{x-a} - \frac{a}{x+a}}$$

$$17^\circ) \frac{\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}}{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}$$

$$19^\circ) \frac{1}{a - \frac{1}{a + \frac{1}{a}}}$$

$$21^\circ) x^2 - \frac{x}{1 - \frac{x}{x+1}}$$

$$23^\circ) \frac{a+b}{a+b + \frac{1}{a-b + \frac{b^2}{a+b}}}$$

$$25^\circ) \frac{\frac{x-y}{x+y} - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$$

$$27^\circ) \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}} : \frac{\frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4}}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2}$$

$$28^\circ) \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}} : \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a+c}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a+c}}$$

$$29^\circ) \frac{\frac{x}{1 + \frac{1}{x-1}}}{1 + \frac{x}{x^2 - \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}}}}$$

$$18^\circ) \frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b}}$$

$$20^\circ) 3 - \frac{1}{4 - \frac{5}{2 - \frac{a}{b}}}$$

$$22^\circ) \frac{2}{a - \frac{a^2-1}{a + \frac{1}{a-1}}}$$

$$24^\circ) \frac{x}{1 - \frac{1-x}{1 + \frac{x^2}{3-x}}}$$

$$26^\circ) \frac{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}}{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$$

$$30^{\circ}) \quad \frac{\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}}{1 : \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} : \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}} - 2}$$

100. Evaluación de fracciones. Casos singulares.

Ya en §§ 36 y 37 hemos tratado sobre la determinación del valor numérico de las expresiones algebraicas y, en particular, de las expresiones algebraicas fraccionarias. Así, por ejemplo, la fracción

$$\frac{2x - 3y}{x^2 + xy + y^2}$$

toma para $x = 2$, $y = 1$ el valor numérico

$$\frac{2 \cdot 2 - 3 \cdot 1}{2^2 + 2 \cdot 1 + 1^2} = \frac{1}{7}.$$

En este proceso de determinación del valor numérico (o evaluación) de una fracción algebraica puede ocurrir que el numerador, el denominador, o ambos, se reduzcan a cero. Estos casos especiales o singulares se denotan escribiendo

$$\frac{0}{a}, \quad \frac{a}{0} \quad \text{y} \quad \frac{0}{0}$$

en donde $a \neq 0$, y de ellos vamos a ocuparnos ahora particularmente.

Primer caso. Forma $\frac{0}{a}$.

Esta forma no ofrece dificultad alguna. Cuando el numerador de una fracción es cero y el denominador no lo es, el valor de la fracción es cero, ya que, como se sabe, cero dividido entre cualquier otro número es cero. Es decir:

$$\frac{0}{a} = 0.$$

En efecto, se tiene $0 \cdot a = 0$, esto es, el producto del cociente por el divisor es igual al dividendo.

Ejemplo. Para $x = 3$ el valor numérico de la fracción

$$\frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$$

es

$$\frac{9 - 3 - 6}{3 + 2} = \frac{0}{5} = 0.$$

Segundo caso. Forma $\frac{a}{0}$.

Puesto que la división por cero de un número distinto de cero no se define en Aritmética (ver §§ 7-8), la forma $a/0$ carece de significado numérico. En Álgebra no es permisible atribuir a las letras que figuren en una expresión fraccionaria valores que anulen algún denominador y conduzcan a la forma $a/0$.

Ejemplo. No es admisible poner $x = 2$ en la fracción

$$\frac{x + 1}{x - 2}$$

ya que esto conduciría a la expresión $3/0$ a la cual es imposible atribuir significado numérico alguno.

En todas las fórmulas y ejemplos de expresiones fraccionarias que aparecen en esta obra se sobreentiende siempre que se excluyen de los valores atribuibles a las letras, aquéllos que anulen algún denominador.

Observación. En ramas más avanzadas de la Matemática se escribe

$$\frac{a}{0} = \infty$$

simbolismo que tiene el significado siguiente:

$$\frac{a}{x} > K \quad \text{si} \quad x \rightarrow 0$$

lo que quiere decir: el cociente a/x toma valores absolutos mayores que cualquier número positivo arbitrario K , siempre que x se tome bastante pequeño, esto es, bastante próximo a cero.

Nótese, por ejemplo, que

$$\frac{2}{0,01} = 200 \quad , \quad \frac{2}{0,0001} = 20\,000, \quad \text{etc.}$$

de modo que a medida que disminuye el denominador de un quebrado (permaneciendo fijo el numerador) el valor del quebrado aumenta, y se puede hacer dicho valor mayor que cualquier número positivo con tal de tomar el denominador suficientemente pequeño. Cuando un ente variable v toma valores mayores que cualquier número positivo se dice que crece infinitamente o que tiende a infinito (en símbolos: $v \rightarrow \infty$). Tenemos, pues, que un quebrado de numerador fijo y denominador que se aproxima a cero, crece en valor absoluto infinitamente. Esta frase, o la escrita más arriba en letra cursiva, es lo que se expresa en forma condensada al escribir simbólicamente

$$\frac{a}{0} = \infty.$$

Este uso del símbolo $a/0$ difiere esencialmente del que le dimos al principio (y que es el que corresponde en Álgebra elemental), a saber: *resultado (inadmisible) a que puede conducir la sustitución directa de valores numéricos en una fracción algebraica.*

Este uso diverso del símbolo $a/0$ en dos ramas distintas de la Matemática (el Álgebra y el Análisis) ha dado origen a muchas confusiones.

Tercer caso. Forma $\frac{0}{0}$.

Finalmente, consideremos el caso en que la sustitución de un cierto sistema de valores de las letras que figuren en una fracción algebraica produzca la anulación de ambos términos, el numerador y el denominador. En tal caso puede tomarse como valor del cociente cualquier número k , esto es:

$$\frac{0}{0} = k, \quad k = n^{\circ} \text{ arbitrario}$$

lo que es sin duda correcto puesto que $0 \cdot k = 0$, cualquiera que sea k . Por ejemplo, podemos decir que

$$\frac{0}{0} = 5 \quad \text{ó} \quad \frac{0}{0} = -3, \quad \text{etc.}$$

Debido a esto se dice que la forma $0/0$ es *indeterminada*, y se escribe

$$\frac{0}{0} = \text{ind.}$$

Ejemplo. Si en la fracción

$$\frac{3x + 4y - 18}{5x - 2y - 4}$$

ponemos $x = 2$, $y = 3$ se obtiene

$$\frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 18}{5 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 4} = \frac{0}{0} = \text{ind.}$$

En general, también se excluye del conjunto de valores permisibles de las letras que figuran en una fracción algebraica, aquéllos que hacen indeterminado el valor numérico de la fracción.

Se exceptúa el caso en que ambos términos de la fracción sean polinomios que contengan una sola letra, por ejemplo, x . En este caso la anulación de ambos polinomios para un cierto valor de x , digamos para $x = a$, indica que ambos admiten el factor $x - a$ (§ 79). Simplificada entonces la fracción, si la nueva fracción tiene valor numérico para $x = a$, se dice que éste es el verdadero valor (mejor sería decir valor convencional) de la primera fracción para $x = a$.

Ejemplos.

1. Verdadero valor de $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}$ para $x = 2$.

Sustituyendo directamente se tiene

$$\frac{2^2 - 5 \cdot 2 + 6}{2^2 - 6 \cdot 2 + 8} = \frac{0}{0}$$

La anulación de ambos polinomios para $x = 2$ indica que ambos admiten como factor el binomio $x - 2$. Descomponiendo en factores y simplificando se obtiene

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x - 4)} = \frac{x - 3}{x - 4}.$$

La primera fracción es equivalente a la última para todo $x \neq 2$. Como para $x = 2$ la última fracción toma el valor $\frac{2 - 3}{2 - 4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$, se conviene en asignar este número como

verdadero valor de la primera fracción para $x = 2$. La ventaja que tiene el hacerlo así consiste en que entonces se pueden considerar ambas fracciones como equivalentes en sentido estricto, es decir, sin valores especiales que excluir*.

2. Verdadero valor de $\frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$ para $x = 1$.

La sustitución directa conduce a la forma $0/0$. Descomponiendo ambos polinomios en factores y simplificando se tiene

$$\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{x+2}{x+3}.$$

Para $x = 1$ la última fracción toma el valor $\frac{3}{4}$. Por tanto, éste es el verdadero valor de la fracción dada para $x = 1$.

3. Verdadero valor de $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - 7x^2 + 15x - 9}$ para $x = 3$.

También aquí tenemos $0/0$ por sustitución directa. Descomponiendo en factores y simplificando resulta

$$\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)^2(x-1)} = \frac{x+1}{(x-3)(x-1)}.$$

Como la última fracción carece de valor numérico para $x = 3$ no es posible en este caso asignar verdadero valor a la primera fracción para $x = 3$.

Tampoco en el caso de la fracción

$$\frac{3x + 4y - 18}{5x - 2y - 4}$$

para $x = 2$, $y = 3$ y en otros muchos análogos es posible asignar un "verdadero valor" o valor convencional a la fracción propuesta**.

* Recuérdese que en el § 39 dijimos que dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando toman los mismos valores numéricos, cualesquiera sean los valores atribuidos a las letras que contienen.

** Para más detalles consúltase M. O. GONZÁLEZ. *Complementos de Aritmética y Álgebra* pp. 166-168.

EJERCICIO 84.

Hallar el valor numérico de cada una de las fracciones siguientes para los valores de las letras que se indican o expresar que la fracción correspondiente carece de valor numérico. En los casos de indeterminación dar, si es posible, el verdadero valor.

$$1^{\circ}) \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2} \quad \text{para } x = 4$$

$$2^{\circ}) \frac{x^2 - 9}{x^2 + 1} \quad \text{para } x = -3$$

$$3^{\circ}) \frac{x + 6}{x^2 - 1} \quad \text{para } x = 1$$

$$4^{\circ}) \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 8} \quad \text{para } x = -5$$

$$5^{\circ}) \frac{2x + 3}{x^2 - 5x - 14} \quad \text{para } x = -2$$

$$6^{\circ}) \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 6x + 9} \quad \text{para } x = 3$$

$$7^{\circ}) \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} \quad \text{para } x = 2$$

$$8^{\circ}) \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 6x + 5} \quad \text{para } x = 5$$

$$9^{\circ}) \frac{x^3 + x^2 - x + 2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 2} \quad \text{para } x = -2$$

$$10^{\circ}) \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} \quad \text{para } x = -1$$

$$11^{\circ}) \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} \quad \text{para } x = 2$$

$$12^{\circ}) \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 - 3x + 2} \quad \text{para } x = 1$$

$$13^{\circ}) \frac{3x^2 + x - 1}{2x^2 + 5x - 3} \quad \text{para } x = \frac{1}{2}$$

$$14^{\circ}) \frac{2x + y - 4}{3x + 2y - 7} \quad \text{para } x = 1, y = 2$$

$$15^{\circ}) \frac{x^2 + y^2}{x - y} \quad \text{para } x = y = 3.$$

EJERCICIO 85. (REPASO).

I. Simplificar:

1º) $\frac{-36a^3bc^2}{54a^2b^5c^3}$

2º) $\frac{150x^3y^6z^2}{225x^5y^4t^3}$

3º) $\frac{a^2 - ab - 30b^2}{a^2 - 3ab - 18b^2}$

4º) $\frac{x^2y^2 - xy^3}{x^3y - xy^3}$

5º) $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$

6º) $\frac{(a+x)^2 - (b+y)^2}{(a+y)^2 - (b+x)^2}$

7º) $\frac{x^{12} + y^{12}}{x^5 + x^4y + xy^4 + y^5}$

8º) $\frac{b^2 - 1}{(1+ab)^2 - (a+b)^2}$

9º) $\frac{2x^2 - 5x - 3}{2x^3 - x^2 - 5x - 2}$

10º) $\frac{a^3 + 2a^2 - 3}{a^4 + 2a^3 + a^2 + 3}$

II. Reducir al mínimo común denominador:

1º) $\frac{1}{3x^3y^2}, \frac{-1}{2y^2z^3}, \frac{5}{6x^2z^2}$

2º) $\frac{a}{a+b}, \frac{b}{b-a}, \frac{a^2}{a^2-b^2}$

3º) $\frac{1}{x^2 - xy - 12y^2}, \frac{2}{2x^2 + 5xy - 3y^2}$

4º) $\frac{1}{(x-y)(y-z)}, \frac{1}{(y-z)(x-z)}, \frac{1}{(z-x)(x-y)}$

5º) $\frac{x}{x^3 - y^3}, \frac{y}{x^3 + y^3}, \frac{1}{x^2 + xy + y^2}, \frac{1}{x^2 - xy + y^2}$

III. Sumar:

1º) $\frac{x-1}{5} + \frac{x-2}{10} - \frac{x+1}{2} + \frac{x-4}{5}$

2º) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{2x}{1-x^2}$

3º) $\frac{2}{3a+1} - \frac{3}{3a-1} + \frac{3a}{9a^2-1}$

4º) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} + \frac{a-1}{b-a} + \frac{b+1}{a+b}$

$$5^{\circ}) \frac{2}{x-1} + \frac{x-3}{x^2+x+1} - \frac{3x^2}{x^3-1}$$

$$6^{\circ}) \frac{1}{x^2-9x+20} - \frac{1}{x^2-11x+30} + \frac{2}{x^2-10x+24}$$

$$7^{\circ}) \frac{1}{a-1} + \frac{2}{a+2} - \frac{2}{a-2} - \frac{1}{a+1}$$

$$8^{\circ}) \frac{b+1}{(b-2)(b-3)} + \frac{b}{(b-3)(4-b)} - \frac{2}{(b-2)(b-4)}$$

$$9^{\circ}) \frac{x}{x+y} + \frac{x}{x-y} + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^4}{x^4+y^4}$$

$$10^{\circ}) \frac{xy+z^2}{(x-z)(y-z)} + \frac{xz+y^2}{(x-y)(z-y)} + \frac{yz+x^2}{(y-x)(z-x)}$$

IV. Reducir a la forma fraccionaria:

$$1^{\circ}) 3x + \frac{5-x}{2}$$

$$2^{\circ}) 2y - \frac{6xy-y^2}{3x}$$

$$3^{\circ}) x + y - \frac{x^2-y^2}{x+2y}$$

$$4^{\circ}) \frac{a^2}{1-a} + a^2 + a + 1$$

$$5^{\circ}) 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{1+x}$$

V. Reducir a la forma entera o mixta:

$$1^{\circ}) \frac{4a^3-2a+5}{2a}$$

$$2^{\circ}) \frac{x^3+x^2-3}{x+2}$$

$$3^{\circ}) \frac{x^3}{x-y}$$

$$4^{\circ}) \frac{x^3-x^2y-xy^2+y^3}{x+y}$$

$$5^{\circ}) \frac{x^4}{x^2-x+1}$$

VI. Multiplicar:

$$1^{\circ}) \frac{6a^2b^4c}{5ax^2y^3} \cdot \frac{-10xyz}{3b^3c^2z^2} \cdot \frac{7ax^2z}{4by^2}$$

$$2^{\circ}) \frac{a^2+ab}{ab-2b^2} \cdot \frac{a^2-ab-2b^2}{a^2-ab} \cdot \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$$

$$3^{\circ}) \frac{x^2+x-6}{x^2+x-2} \cdot \frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-8} \cdot \frac{x^2+2x}{x^2-9}$$

$$4^{\circ}) \frac{4x^2 - 9y^2}{2x^2 + 3xy - 2y^2} \cdot \frac{4x^2 - 4xy + y^2}{2x^2y - 3xy^2} \cdot \frac{x^2y^2}{2xy + 3y^2}$$

$$5^{\circ}) \frac{a^3 - b^3}{a - 3b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + ab + b^2} \cdot \frac{a^2 + ab - 12b^2}{a^2 + 3ab - 4b^2}$$

VII. Dividir:

$$1^{\circ}) \frac{26a^4x^2z^5}{21b^3c^2y} : \frac{13a^2x^3z^4}{14b^2c^4y^2}$$

$$2^{\circ}) \frac{ax + x^2}{3b + cx} : \frac{(a + x)^2}{3bx + cx^2}$$

$$3^{\circ}) \frac{c^4 - 1}{x^3 + 1} : \frac{c - 1}{x^2 - x + 1}$$

$$4^{\circ}) \frac{(x + y)^2 - z^2}{(x - y)^2 - z^2} \cdot \frac{x^2 - (y + z)^2}{x^2 - (y - z)^2}$$

$$5^{\circ}) \frac{(a + y)^2 - (x + z)^2}{(a + x)^2 - (y + z)^2} : \frac{(a - y)^2 - (x + z)^2}{(a + x)^2 - (y - z)^2}$$

VIII. Efectuar:

$$1^{\circ}) \frac{a^2 - 8a + 7}{a^2 - 6a - 16} : \frac{2a^2 - 13a - 7}{2a^2 - 15a - 8} \cdot \frac{a^2 + 2a}{a^2 - 1}$$

$$2^{\circ}) \left(a + x + \frac{3a^2 + x^2}{a - x} \right) \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)$$

$$3^{\circ}) \left(\frac{m + n}{m - n} + \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2} \right) \left(\frac{m + n}{m - n} - \frac{m^3 + n^3}{m^3 - n^3} \right)$$

$$4^{\circ}) \left(\frac{a^2}{a^2 - b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} - 1 \right) \frac{a^4 - b^4}{a^3b^3}$$

$$5^{\circ}) \left(1 + \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} \right) \left(\frac{1}{x + y} + \frac{1}{z} \right) : \left(\frac{1}{x + y} - \frac{1}{z} \right)$$

IX. Simplificar:

$$1^{\circ}) \frac{\frac{a}{a + b} + \frac{b}{a}}{\frac{b}{a + b} + \frac{a}{b}}$$

$$2^{\circ}) \frac{\frac{x}{x + 1} + \frac{x}{x + 3}}{\frac{x}{x^2 - 1}}$$

$$3^{\circ}) \quad 1 - \frac{x}{x + \frac{4}{x + \frac{6}{x}}} \qquad 4^{\circ}) \quad \frac{\frac{m+n}{m-n} + 1}{\frac{m-n}{m+n} + 1}$$

$$5^{\circ}) \quad \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}} \qquad 6^{\circ}) \quad \frac{x-a}{x-a - \frac{x}{1 - \frac{x}{x-a}}}$$

$$7^{\circ}) \quad \frac{\frac{x}{xy+y^2} - \frac{y}{x^2+xy}}{\frac{x}{x^2-y^2} - \frac{1}{x+y}}$$

$$8^{\circ}) \quad \frac{x^2}{x - \frac{x^2+y^2}{x+y}} + \frac{y^2}{y - \frac{x^2+y^2}{x+y}}$$

$$9^{\circ}) \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3 + \frac{1}{a}}}}$$

$$10^{\circ}) \quad \frac{x^2 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right) + y^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x} \right) + z^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)}{x \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right) + y \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x} \right) + z \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)}$$

X. Evaluar:

$$1^{\circ}) \quad \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 3} \qquad \text{para } x = 5$$

$$2^{\circ}) \quad \frac{x^3 - x^2 + 7}{x^2 - 4x} \qquad \text{para } x = 4$$

$$3^{\circ}) \quad \frac{x^2 + 9x + 14}{x^2 + 6x + 8} \qquad \text{para } x = -2$$

$$4^{\circ}) \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 6}{x^3 - 2x^2 - 4x + 3} \quad \text{para } x = 3$$

$$5^{\circ}) \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \quad \text{para } x = 1.$$

TEST 10.

I. Simplificar:

$$1^{\circ}) \frac{x^5y - 4xy^3}{x^4y^2 - 2x^2y^3}$$

$$2^{\circ}) \frac{x^3 - 8}{x^3 - x^2 - 2x - 12}$$

II. Efectuar:

$$1^{\circ}) \frac{2}{2x - 1} + \frac{1}{x - 2} - \frac{2x}{x^2 - 4}$$

$$2^{\circ}) 3x - 5 - \frac{5 - 8x}{x - 1}$$

$$3^{\circ}) \left(\frac{x}{x + 2y} - 1 \right) \left(\frac{x^2}{4y^2} - 1 \right)$$

$$4^{\circ}) \frac{a^2 - 4}{a^2 - a - 6} \cdot \frac{a^2 - 9}{a^2 - a - 2}$$

$$5^{\circ}) \frac{4x^2 - 9}{6x^2 - 11x + 3} : \frac{8x^3 + 27}{9x - 3}$$

III. Indicar cuál es la respuesta correcta en los siguientes:

$$1^{\circ}) \frac{b^2 - 4b - 5}{b^2 + 4b - 5} : \frac{b^2 - 5b - 6}{b^2 - 5b + 4} \cdot \frac{b^3 + 5b^2}{b^2 - 5b}$$

a) b b) $\frac{b^2 - 4b}{b - 6}$ c) $\frac{b(b - 4)(b - 5)^2}{(b - 6)(b + 5)^2}$

$$2^{\circ}) \frac{\frac{a}{a + x} - \frac{a}{a - x}}{\frac{a - x}{a + x} - \frac{a + x}{a - x}}$$

a) 2 b) a c) $\frac{1}{2}$

IV. Verdadero valor de $\frac{2x^2 - 3x - 9}{3x^2 - 11x + 6}$ para $x = 3$.

a) 1 b) $\frac{9}{7}$ c) no tiene

EJERCICIOS DE REPASO de los capítulos 1 á 10.

1º) Hallar el valor numérico de

$$\frac{x-y}{z} + \frac{x+z}{y}$$

para $x = -2$, $y = 3$, $z = 5$.

2º) Hallar el valor numérico de $6x^3y^{-2} - 3x^2y^0$ para $x = 2$, $y = -3$.

3º) Escribir una fórmula que exprese el área total de la superficie de una caja rectangular de largo a , anchura b y altura c .

4º) Calcular el volumen de un cono cuya altura es de 2 dm y cuya base tiene un radio de 24 cm. Tómese $\pi = 3,14$ ($V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$).

5º) De las siguientes expresiones algebraicas decir cuáles son enteras y cuáles son fraccionarias:

a) $4x^{-2}y^3$

b) $2x + y + \frac{1}{2}$

c) $4x^3 + 1 + x^{-2}$

d) $x^2 + \frac{1}{3}$

6º) Sumar los polinomios $6x^2 - 3xy + 2y^2 - z^2 + 3yz + 4xz$
y $-3x^2 - 4y^2 + 2z^2 - xz + yz + 6xy$.

7º) Restar $x^5 - 2x^4y + 3x^3y^2 - 8x^2y^3 + y^5$ de $x^5 - 6x^4y + 3x^3y^2 + y^5 - xy^4$.

8º) Dados los polinomios

$$\begin{aligned} &5a^4 - 2a^3x + 8a^2x^2 + 6ax^3 + 7x^4 \\ &- 7a^4 + 3a^3x - 10a^2x^2 - 3ax^3 + 4x^4 \\ &- 2a^4 - 9a^3x + 5a^2x^2 + 8ax^3 - 3x^4 \\ &3a^4 + 8a^3x - 7a^2x^2 - 4ax^3 + 6x^4 \end{aligned}$$

del primero restar la suma de los tres últimos.

9º) Suprimir paréntesis y reducir términos semejantes:

$$3b - \{4b + x - [2b - (3x - b)] - x\} - [10x - (2b - 3x)].$$

10º) En el polinomio siguiente incluir los términos que contienen x en

un paréntesis precedido del signo + y los términos que contienen y en un paréntesis precedido del signo -:

$$ax - by - cx + a^2y - b^2x + c^2y.$$

11º) Multiplicar: $2x^2y - x^3 + 5y^3 - 4xy^2$ por $xy^2 + 2y^3 - 5x^2y + x^3$.

12º) Multiplicar:

$$x^{n+2} - 4x^{n+1} + 3x^n - 5x^{n-1} \text{ por } x^{2n} + 2x^{2n-1} + 6x^{2n-2}.$$

13º) Dividir: $32xy^2 - 4x^2y^4 + 3x^4y^8 - x^3y^6 - 24$ por $x^2y^4 + 4 - 2xy^2$.

14º) Dividir: $x^{4m} - 4x^{2m}y^{2n} + 4x^my^{3n} - y^{4n}$ por $x^{2m} - 2x^my^n + y^{2n}$.

15º) Resolver:

$$(x + 2)(x + 4) - (x + 1)(x - 3) = 5 - [x - (3 - x)].$$

16º) Un aeroplano vuela 10 % más de prisa con un viento de cola de 25 km por hora, que con el mismo viento de proa. ¿Cuál es su velocidad en aire tranquilo?

17º) Un hombre es 5 años mayor que su esposa y su edad es 6 veces la de su hijo. Hace un año la suma de las edades de los tres era 83 años. Hallar la edad actual de cada uno.

18º) Aplicar la regla correspondiente a los productos notables de los ejercicios 18-23:

a) $(3a - b)(3a + b)$

b) $(2x - 3y)^2$

c) $(b + 11)(b - 6)$

d) $(4x - 3)(2x + 5)$

e) $(2a + x)^3$

f) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

19º) Aplicar la regla correspondiente a los cocientes notables de los ejercicios siguientes:

a) $\frac{9a^2 - 6ax + x^2}{3a - x}$

b) $\frac{a^3 - 27}{a - 3}$

c) $\frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$

d) $\frac{343b^3 + 1}{7b + 1}$

20º) Descomponer en factores:

a) $81a^4 + 11a^2 + 4$

b) $y^4 - 16 - 2y^3 + 8y$

c) $6x^3 + 12x^2y + 12x^4 + 24x^3y + 30x^2 + 60xy$

d) $a^3 + a - b - b^3$

e) $c^4 - cx^9$

f) $x^2 - 4ax - xy + ay + 3a^2$

g) $a^6b^6 - c^{12}$

21º) Hallar l m. c. d. y el m. c. m. de los polinomios dados en los ejercicios siguientes:

a) $4x^2 - 20x + 25$, $15 - x - 2x^2$, $x + 10 - 2x^2$

b) $x^4 + x^2 + 1$, $x^4 - x$, $x^5 + x^2$

22º) Simplificar: $\frac{a^2 - 3abx + 2bx^2}{a^3 - 7a^2x + 6ax^2}$

23º) Simplificar: $\frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^4 - x^3 + x^2 + 2}$

24º) Efectuar las operaciones indicadas en los ejercicios siguientes:

a) $\frac{x^2}{y^2} - \frac{1-x}{y^2+y} + \frac{1+x}{y-y^2} - \frac{x^2-1}{y^2-1}$

b) $\left(\frac{1-x^2}{1+y}\right) \left(\frac{1+y}{x+x^2}\right)^2 \left(1 + \frac{x}{1-x}\right)$

c) $\frac{9a^2-6a}{6a^2-7a+2} \cdot \frac{2a^2+13a-7}{2a^2+6a} \cdot \frac{2a^2+3a-9}{4a^2-8a+3}$

d) $\left(\frac{6m}{m^2-4} - \frac{3}{m-2}\right) : \frac{12}{m^2-m-6}$

e) $\left(a + 2b + \frac{8b^2}{a-2b}\right) : \left[\left(2a - \frac{a^2}{a-2b}\right) \left(a + \frac{4ab+4b^2}{a-4b}\right)\right]$

25º) Simplificar las fracciones complejas siguientes:

a) $\frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{x-2 + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x^2}}$

b) $\frac{\frac{1-4h^2}{(2h+k)^2} \left[1 + \frac{k+1}{2h-1}\right]}{\frac{1}{2h+k} - \frac{1}{2h-k} - \frac{4h}{4h^2-k^2}}$

26º) En los siguientes decir si la afirmación que se hace es verdadera o falsa:

a) El resultado de restar -3 de 0 es -3 .

b) 5 dividido por 0 es 5 .

c) $2^2 \cdot 2^3 = 4^5$

d) $(x+y)^{-1} = \frac{1}{x+y}$

e) $x^{-1} + y^{-1} = \frac{1}{x+y}$

f) $\frac{m}{x+y} = \frac{m}{x} + \frac{m}{y}$

g) $a(x+y) = ax + y$

h) $\frac{a^8}{a^2} = a^4$

i) $a^2 + b^2 = (a+b)^2$

$$j) \quad \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$k) \quad 2x^0 = 1$$

$$l) \quad \frac{2a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{2a+b}{a+b}$$

$$ll) \quad (a-b)(b+a) = b^2 - a^2$$

m) El m. c. d. de $1 - a^3$ y $a^2 - 1$ es $a - 1$

$$n) \quad \frac{1}{2x-a} = -\frac{1}{2x+a}$$

CAPÍTULO 11.

ECUACIONES FRACCIONARIAS.

101. Generalidades.

En el capítulo 6 hemos estudiado la resolución de ecuaciones sencillas. También estudiamos el modo de resolver problemas que conducen a ecuaciones sencillas. En muchas aplicaciones del Álgebra, sin embargo, se encuentran ecuaciones que contienen fracciones algebraicas. Tales ecuaciones se llaman *fraccionarias*.

Ejemplo. La ecuación

$$\frac{5}{x} + \frac{x-4}{3x} = 4$$

es una ecuación fraccionaria.

Hay también muchos problemas, algunos relativamente simples, que conducen a ecuaciones fraccionarias. Más adelante, en este mismo capítulo, daremos varios ejemplos de problemas de esta clase.

102. Principios fundamentales para la resolución de las ecuaciones fraccionarias.

En general, las ecuaciones fraccionarias se resuelven transformándolas en ecuaciones sencillas (enteras).

Ya vimos en § 60 que las siguientes operaciones permiten transformar una ecuación en otra equivalente, esto es, con las mismas soluciones:

a) *Sumar o restar el mismo número o la misma expresión algebraica entera, a ambos miembros de la ecuación.*

b) *Multiplicar o dividir ambos miembros de la ecuación por el mismo número distinto de cero.*

Además de estas operaciones se necesita, en la resolución de las ecuaciones fraccionarias, utilizar la siguiente:

c) *Multiplicar ambos miembros de la ecuación por una expresión que contiene la incógnita.*

Esta operación no conserva, en general, la equivalencia. En efecto, la nueva ecuación puede admitir raíces extrañas, es decir, raíces que no satisfacen a la ecuación original.

Ejemplo. La ecuación

$$x + 3 = 8$$

tiene una sola raíz: $x = 5$. Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por $x - 4$ se obtiene la nueva ecuación

$$x^2 - x - 12 = 8x - 32$$

que admite las raíces $x = 5$ y $x = 4$, como es fácil comprobar por sustitución. Por tanto, la operación realizada introduce la raíz extraña $x = 4$.

De lo anterior resulta que siempre que se utilice la operación c) en la resolución de una ecuación, será necesario comprobar las raíces halladas en la ecuación original, con objeto de desechar las raíces extrañas que se hayan podido introducir.

Conviene observar que con la operación de multiplicar ambos miembros de la ecuación $A = B$ por la expresión entera M no se pierden raíces, es decir, la ecuación $AM = BM$ tiene, al menos, todas las raíces de $A = B$. En efecto, supongamos que para $x = r$, las expresiones A , B y M tomen, respectivamente, los valores numéricos a , b y m . Si $x = r$ es raíz de $A = B$, tendremos $a = b$. Multiplicando esta última igualdad por m , resulta $am = bm$; por consiguiente, $x = r$ es también raíz de $AM = BM$.

Observaremos, por último, que si ambos miembros de una ecuación fraccionaria se multiplican por el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones que contiene, toda raíz de la ecuación obtenida lo es también de la ecuación original, siempre que no anule el mínimo común denominador.

Ejemplo. Sea la ecuación

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x^2-2}{x^2-4}$$

Multiplicando ambos miembros por $x^2 - 4$, que es el m.c.m. de los denominadores, se obtiene:

$$\begin{aligned} x(x-2) &= x^2 - 2, \\ \text{ó} \\ x^2 - 2x &= x^2 - 2 \\ -2x &= -2 \\ x &= +1. \end{aligned}$$

Como este valor $x = 1$ no anula al multiplicador empleado, esto es, a $x^2 - 4$, es seguramente raíz de la ecuación propuesta.

Comprobación. Sustituyendo $x = 1$ en la ecuación de partida se encuentra

$$\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3}.$$

103. Resolución de ecuaciones fraccionarias.

El método general que se emplea para resolver una ecuación fraccionaria consiste en transformarla en una ecuación entera (sin denominadores), la cual se resuelve de la manera ya estudiada en el capítulo 6. Para efectuar esta transformación, o como también se dice, para quitar los denominadores a la ecuación, basta multiplicar sus dos miembros por el m.c.m. de los denominadores de las fracciones que figuren en ella*.

Sin embargo, no siempre es éste el método más sencillo. A veces conviene quitar primero algunos denominadores, simplificar, y suprimir después los restantes; o bien, efectuar las sumas o restas de fracciones indicadas en la ecuación. Véanse ejemplos 5 y 6.

Ejemplos.

1. Resolver la ecuación

$$[1] \quad \frac{2x-1}{3} - \frac{3x+1}{4} = x - \frac{5x+11}{6}$$

* Se supone que estas fracciones son simples. Por tanto, si la ecuación contuviese fracciones complejas se comenzaría por reducirlas a fracciones simples. Véase más adelante el ejemplo 4.

El m. c. m. de los denominadores es 12. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por este número se obtiene

$$[2] \quad 4(2x - 1) - 3(3x + 1) = 12x - 2(5x + 11)$$

de donde resulta:

$$8x - 4 - 9x - 3 = 12x - 10x - 22$$

$$-3x = -15$$

$$x = +5.$$

La ecuación entera [2] es completamente equivalente a la [1], pues se multiplicaron ambos miembros de [1] por un número, operación que conserva la equivalencia. Por tanto, $x = 5$ es raíz o solución de [1].

Comprobación. Sustituyendo $x = 5$ en [1] se obtiene

$$\frac{9}{3} - \frac{16}{4} = 5 - \frac{36}{6} \quad \text{ó} \quad -1 = -1.$$

2. Resolver la ecuación

$$\frac{x}{x-3} + \frac{2x-1}{x+3} = \frac{14}{x^2-9} + 3.$$

El m. c. m. de los denominadores es $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$. Multiplicando ambos miembros de la ecuación propuesta por $x^2 - 9$ se obtiene:

$$x(x + 3) + (2x - 1)(x - 3) = 14 + 3(x^2 - 9).$$

Efectuando operaciones y simplificando:

$$x^2 + 3x + 2x^2 - 7x + 3 = 14 + 3x^2 - 27$$

$$-4x = -16$$

$$x = +4.$$

Como la raíz hallada no anula el multiplicador empleado, esto es, a $x^2 - 9$, se puede asegurar que $x = +4$ es raíz de la ecuación propuesta. Compruébese.

3. Resolver la ecuación

$$[1] \quad \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$$

Multiplicando por $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ se encuentra

$$[2] \quad x + 2 + x - 2 = 4$$

$$2x = 4$$

$$x = 2.$$

Este valor $x = 2$, que anula el multiplicar empleado $x^2 - 4$, es raíz de la ecuación transformada [2] pero no de la ecuación original [1]. Puesto que la división por cero es inadmisibles, no tiene sentido efectuar la sustitución $x = 2$ en la ecuación [1], lo cual conduciría a

$$\frac{1}{0} + \frac{1}{4} = \frac{4}{0}.$$

$x = 2$ es, pues, una raíz extraña. La ecuación propuesta carece, por tanto, de raíz.

EJERCICIO 86.

Resolver las ecuaciones siguientes:

$$1^\circ) \quad \frac{x}{6} + \frac{3x}{4} = 11$$

$$2^\circ) \quad \frac{x-1}{5} + \frac{7x}{10} = 7$$

$$3^\circ) \quad 5x - \frac{x}{4} = 9,5$$

$$4^\circ) \quad \frac{x}{3} - \frac{5x}{6} + \frac{x}{4} = 1$$

$$5^\circ) \quad x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 33$$

$$6^\circ) \quad \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 54 - x$$

$$7^\circ) \quad \frac{3x-2}{4} = \frac{3x+3}{8}$$

$$8^\circ) \quad \frac{5x-1}{3} = \frac{5x+2}{4}$$

$$9^\circ) \quad \frac{3}{x} + \frac{5}{x} = 16$$

$$10^\circ) \quad \frac{4}{x} - \frac{x+2}{2x} = 1$$

$$11^\circ) \quad \frac{4}{x-1} = \frac{7}{x+2}$$

$$12^\circ) \quad \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-5}$$

$$13^{\circ}) \quad \frac{x-2}{3} + \frac{x+1}{6} - \frac{x-1}{4} = 1$$

$$14^{\circ}) \quad \frac{x+2}{5} - \frac{3x+1}{2} + \frac{x-1}{4} = \frac{5}{2} - 2x$$

$$15^{\circ}) \quad \frac{3x+4}{11} + \frac{5x-8}{22} = \frac{5x+6}{6} - 3$$

$$16^{\circ}) \quad \frac{5}{x+1} + \frac{3}{2(x+1)} - \frac{2}{3(x+1)} = \frac{7}{6}$$

$$17^{\circ}) \quad \frac{2}{x-2} - \frac{3}{2x-4} = \frac{x}{3x-6} - \frac{1}{2}$$

$$18^{\circ}) \quad \frac{8}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} + \frac{x^2+31}{x^2-9} = 0$$

$$19^{\circ}) \quad \frac{3}{1+x} - \frac{x^2+1}{1-x^2} + \frac{x+1}{1-x} = 0$$

$$20^{\circ}) \quad \frac{2x-1}{2x+1} - \frac{10}{4x^2-1} = \frac{1+2x}{1-2x}$$

$$21^{\circ}) \quad \frac{x+1}{3x-6} - \frac{x-1}{2x+4} = \frac{10-x^2}{6x^2-24}$$

$$22^{\circ}) \quad \frac{5}{x+1} + \frac{7}{x+3} - \frac{70}{x^2+4x+3} = 0$$

$$23^{\circ}) \quad \frac{2}{x+5} + \frac{1}{x-5} + \frac{20}{x^2-25} = 0$$

$$24^{\circ}) \quad \frac{4}{2x-3} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x+3}$$

$$25^{\circ}) \quad \frac{3x^2-2x}{3x+1} + \frac{1}{2x} = x-1$$

$$26^{\circ}) \quad \frac{2x+1}{5} + \frac{3x+2}{2x+3} = \frac{6x+1}{15} + \frac{4}{5}$$

$$27^{\circ}) \quad \frac{5}{x^2-x-6} = \frac{3}{x^2-4} + \frac{1,5}{x^2-5x+6}$$

$$28^{\circ}) \quad \frac{2}{y^2-y-2} + \frac{1}{y^2-3y+2} = \frac{8}{y^2-1}$$

$$29^\circ) \quad \frac{2}{z^2 - 2z - 8} + \frac{1}{z^2 - z - 12} = \frac{13}{z^2 + 5z + 6}$$

$$30^\circ) \quad \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} + \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = 2x.$$

4. Consideremos ahora la ecuación

$$\frac{12}{5}x + \frac{\frac{2x - 3}{x}}{\frac{2}{3}} = \frac{2x + \frac{1}{x}}{\frac{5}{6}} + 2$$

que contiene fracciones complejas.

En las ecuaciones de este tipo se comienza por reducir las fracciones complejas o fracciones simples, efectuando las operaciones indicadas. En el ejemplo propuesto se obtiene inmediatamente

$$\frac{12}{5}x + \frac{3(2x - 3)}{2x} = \frac{6(2x^2 + 1)}{5x} + 2.$$

Multiplicando por $10x$ para quitar denominadores resulta:

$$24x^2 + 30x - 45 = 24x^2 + 12 + 20x$$

$$10x = 57$$

$$x = 5,7.$$

5. Sea la ecuación

$$\frac{3x + 2}{9} + \frac{4x + 3}{3x + 6} = \frac{x + 3}{3}.$$

Cuando en la ecuación figuran denominadores monomios y polinomios, conviene generalmente suprimir primero los denominadores monomios, simplificar el resultado y proceder sucesivamente a la supresión de los denominadores polinomios. Así, en la ecuación anterior se tiene, multiplicando primero por 9:

$$3x + 2 + \frac{3(4x + 3)}{x + 2} = 3x + 9.$$

Simplificando:

$$\frac{3(4x + 3)}{x + 2} = 7.$$

Multiplicando ahora por $x + 2$ se obtiene:

$$12x + 9 = 7x + 14$$

$$5x = 5$$

$$x = 1.$$

El método general consistiría en multiplicar la ecuación dada por $9(x + 2)$. Hágase y compruébese que la resolución resulta más trabajosa que en la forma expuesta arriba.

6. Consideremos, por último, una ecuación de la forma

$$\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x + 4}.$$

Efectuando primero las sustracciones indicadas se tiene

$$\frac{(x + 2) - (x + 1)}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{(x + 4) - (x + 3)}{(x + 3)(x + 4)}$$

$$\frac{1}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{1}{(x + 3)(x + 4)}.$$

Suprimiendo ahora los denominadores resulta:

$$(x + 3)(x + 4) = (x + 1)(x + 2)$$

$$x^2 + 7x + 12 = x^2 + 3x + 2$$

$$4x = -10$$

$$x = -2,5.$$

Sería mucho más trabajoso comenzar por quitar los denominadores en la ecuación original.

EJERCICIO 87.

Resolver las ecuaciones siguientes:

$$1^{\circ}) \quad \frac{4 - \frac{2x}{3}}{6} = \frac{1 + \frac{x}{3}}{2} - \frac{2}{3}$$

$$2^{\circ}) \quad \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{x}{4}}{2} = \frac{2 + \frac{3x}{2}}{5}$$

$$3^{\circ}) \quad \frac{\frac{2x-3}{x}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{3}{2}}$$

$$4^{\circ}) \quad \frac{1}{3}x + \frac{\frac{4x-1}{x}}{6} = \frac{x + \frac{2}{x}}{3} - \frac{1}{6}$$

$$5^{\circ}) \quad \frac{\frac{x}{1 - \frac{1}{x}}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{2}{1 + \frac{2}{x}}$$

$$6^{\circ}) \quad \frac{2x+3}{9} - \frac{3x-5}{2x-3} = \frac{4x-3}{18} - \frac{5}{6}$$

$$7^{\circ}) \quad \frac{9x+25}{27} = \frac{3x+8}{2x+6} + \frac{x}{3} - \frac{2}{27}$$

$$8^{\circ}) \quad \frac{2x+7}{5} = \frac{4x-1}{7x+2} + \frac{10x+22,5}{25}$$

$$9^{\circ}) \quad \frac{3x+10}{15} + \frac{2x-8}{x-1} = \frac{x+20}{5} - \frac{17}{6}$$

$$10^{\circ}) \quad \frac{x+8}{7} + \frac{x^2+1}{7x+3} = \frac{4x+11}{14}$$

$$11^{\circ}) \quad \frac{4x+15}{6} - \frac{6x+14}{9} = \frac{20+x}{15-x}$$

$$12^{\circ}) \quad \frac{x+5}{11} - \frac{2x+21}{22} = \frac{2x-18}{x+6}$$

$$13^{\circ}) \quad \frac{3x+4}{5} - \frac{2x-5}{x+2} + \frac{x}{10} = \frac{5x}{7} - \frac{14+x}{70}$$

$$14^{\circ}) \quad \frac{5x+1}{4} - \frac{3x^2+2}{3(x+1)} + \frac{7}{12} = \frac{3x+2}{12}$$

$$15^{\circ}) \quad \frac{x^2 + 2}{x + 5} + \frac{1 - 6x}{20} - \frac{x}{2} = \frac{2x + 3}{10}$$

$$16^{\circ}) \quad \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x + 3} = \frac{1}{x + 4} - \frac{1}{x + 5}$$

$$17^{\circ}) \quad \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 4} = \frac{1}{x - 5} - \frac{1}{x - 6}$$

$$18^{\circ}) \quad \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 3} = \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x - 2}$$

$$19^{\circ}) \quad \frac{x - 2}{x - 3} - \frac{x - 3}{x - 4} = \frac{x - 5}{x - 6} - \frac{x - 6}{x - 7}$$

$$20^{\circ}) \quad \frac{x + 3}{x + 4} - \frac{x + 4}{x + 5} = \frac{x + 6}{x + 7} - \frac{x + 7}{x + 8}$$

104. Problemas.

Daremos ahora varios ejemplos de problemas que conducen al planteo y resolución de una ecuación fraccionaria.

Ya en § 63 definimos el problema como toda cuestión en la que se propone la determinación de uno o varios números desconocidos (incógnitas) mediante la relación o relaciones que existen entre ellos y otros números conocidos (datos).

Cuando algunos de los números que intervienen en un problema representan medidas de magnitudes físicas se dice que el problema es práctico o de matemática aplicada (ver más adelante los problemas 2 y 6). Si los números que intervienen en el problema son todos abstractos se dice que el problema es de matemática pura (problema 1).

Como en el capítulo 6, distinguiremos en la resolución de un problema las siguientes etapas:

- 1) Representación.
- 2) Planteo de la ecuación.
- 3) Resolución de la ecuación.
- 4) Verificación o comprobación de la solución hallada.

Ejemplos.

1. El denominador de una fracción es 4 unidades mayor que el numerador. Si a cada término de la fracción se agrega 5 la fracción resultante es equivalente a $2/3$. Hallar la fracción original.

1) Representación.

Si representamos por x el numerador de la fracción original, el denominador se podrá representar por $x + 4$. Si agregamos 5 unidades a cada uno, el nuevo numerador será $x + 5$ y el nuevo denominador $x + 9$. Esto es:

	fracción original	fracción modificada
numerador	x	$x + 5$
denominador	$x + 4$	$x + 9$

2) Planteo.

Puesto que la fracción resultante es equivalente a $2/3$, tenemos

$$\frac{x + 5}{x + 9} = \frac{2}{3}$$

3) Resolución.

Quitando los denominadores en la ecuación fraccionaria anterior, se obtiene

$$3(x + 5) = 2(x + 9)$$

$$3x + 15 = 2x + 18$$

$$x = 3$$

Por tanto, el numerador de la fracción original es 3 y el denominador $3 + 4 = 7$. La fracción buscada es, por consiguiente, $3/7$.

4) Comprobación.

Sumando 5 a cada término de $3/7$ se obtiene $8/12$, que equivale a $2/3$.

2. A puede hacer un trabajo en 3 días y B puede hacerlo en 5 días. ¿En qué tiempo lo harán trabajando conjuntamente?

1) Representación.

	Días que demoran en hacer el trabajo	Parte del trabajo que hacen en 1 día
A	3	$\frac{1}{3}$
B	5	$\frac{1}{5}$
A y B	x	$\frac{1}{x}$

2) Planteo.

Puesto que la parte que hace A en un día más la parte que hace B en un día da la parte del trabajo que hacen ambos en un día, resulta:

$$[1] \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{x}.$$

3) Resolución.

Sumando las fracciones que aparecen en el miembro izquierdo se obtiene

$$\frac{8}{15} = \frac{1}{x}$$

y quitando denominadores

$$8x = 15$$

$$x = 1\frac{7}{8}.$$

Por tanto, trabajando conjuntamente harán el trabajo en $\frac{7}{8}$ días.

4) Comprobación.

Sustitúyase el valor encontrado en la ecuación [1].

EJERCICIO 88.

1º) La suma de la cuarta parte y de la quinta parte de un número es 18. Hallar el número.

2º) La suma de la mitad, la tercera y la quinta parte de un número es 31. Hallar el número.

3º) La diferencia entre la cuarta y la séptima parte de un número es 3. Hallar el número.

4º) La suma de la tercera y la quinta parte de un número excede en 40,5 a la diferencia entre la cuarta y la sexta parte. Hallar el número.

5º) El denominador de una fracción excede en 3 unidades al numerador. Si se suma 2 a cada término de la fracción resulta una fracción equivalente a $1/2$. Hallar la fracción original.

6º) El numerador de una fracción es 2 unidades mayor que el denominador. Si se suma 1 a cada término la fracción resulta equivalente a $3/2$. Hallar la fracción original.

7º) El denominador de una fracción excede en 4 unidades al numerador. Si se resta 5 a cada término la fracción resultante es equivalente a $3/5$. Hallar la fracción original.

8º) Hallar el número que sumado al numerador y al denominador de $7/10$ convierte esta fracción en otra equivalente a $3/4$.

9º) Si del numerador y del denominador de la fracción $8/13$ se resta cierto número, se obtiene una nueva fracción que es reducible a $1/2$. Hallar dicho número.

10º) Si al numerador de la fracción $4/21$ se le suma el duplo de cierto número y al denominador se le resta el triple del mismo número se obtiene una fracción equivalente a $5/6$. Hallar el número.

11º) Pedro puede levantar un muro en 6 días y Julián en 8 días. ¿En qué tiempo harán el muro trabajando conjuntamente?

12º) Luis puede hacer una obra en 15 días y Jorge puede hacer la misma obra en 10 días. ¿Qué tiempo tardarán trabajando conjuntamente?

13º) Francisco puede hacer una obra en 3 días, Santiago en 4 días y José en 6 días. ¿En qué tiempo harán la obra trabajando conjuntamente?

14º) Ricardo puede hacer una obra en 9 días y Alberto en 12 días. Ricardo y Alberto trabajando conjuntamente con Vicente pueden hacer la obra en 3 días. ¿En cuánto tiempo Vicente podrá hacer la obra trabajando solo?

15º) Juan y Antonio trabajando juntos pueden abrir una zanja en 12 horas. Antonio y Tomás pueden abrirla en 15 horas. Antonio trabajando

solo tardaría 25 horas. ¿Qué tiempo tardarían en abrir la zanja Juan y Tomás?

16º) Un caño de agua puede llenar un tanque en 28 minutos y otro en 42 minutos. Si se abren ambos caños simultáneamente, ¿en qué tiempo llenarán el tanque?

17º) Un caño puede llenar un aljibe en 30 horas, otro caño en 36 horas y el tercer caño en 20 horas. ¿En qué tiempo llenarán el aljibe los tres caños si se abren simultáneamente?

18º) Un tanque puede llenarse por un caño en $2\frac{1}{2}$ horas, por otro caño en $3\frac{1}{3}$ horas y por el tercero en 5 horas. ¿En qué tiempo se llenará el tanque si se abren los tres a la vez?

19º) Una piscina se puede llenar por un grifo en 4 horas y por otro en 3 horas; y se puede vaciar por un desagüe en 6 horas. Si se abren simultáneamente los dos grifos y el desagüe, ¿en qué tiempo se llenará la piscina?

20º) Un tanque se puede llenar por un grifo en 20 minutos. Después que este grifo ha estado corriendo durante 5 minutos, se abre otro grifo y entonces se llena el tanque en 3 minutos más. ¿Cuánto tiempo tardaría el segundo grifo solo en llenar el tanque?

3. Un móvil sale de A al mismo tiempo que otro sale de B y van en sentidos opuestos uno al encuentro del otro. El primero lleva una velocidad constante de 45 km por hora y el segundo una velocidad, también constante de 35 km por hora. Si la distancia entre A y B es de 400 km, ¿a qué distancia de A se encontrarán los móviles y cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

En los problemas de móviles supondremos siempre que los cuerpos se mueven con velocidad constante. Este tipo de movimiento se llama *uniforme*. En realidad el movimiento de un automóvil, de un tren, de un barco, de un avión, etc., es siempre *variado*, es decir, no uniforme, pero podemos imaginar sustituido el móvil por otro que recorre el mismo espacio en igual tiempo y se mueve con movimiento uniforme. Esta sustitución reemplaza el problema real por uno ideal que es más fácil de resolver y que proporciona soluciones aproximadas del primero.

En el movimiento uniforme la velocidad (v) de un cuerpo se define mediante la fórmula

$$v = \frac{e}{t}$$

en donde e significa el espacio (o distancia) recorrido y t es el tiempo empleado en recorrerlo. Así, por ejemplo, la velocidad de un móvil que ha recorrido 240 km en 3 horas (con movimiento uniforme); es de $\frac{240}{3} = 80$ km. por hora.

De la fórmula anterior se deduce

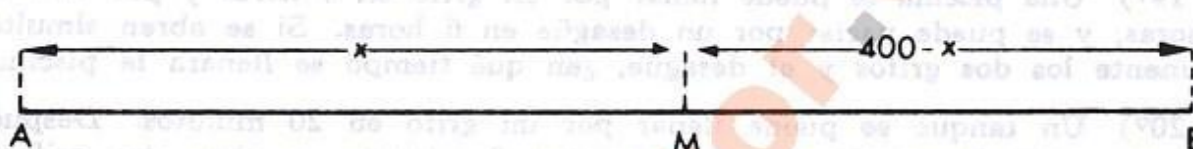
$$e = vt, \quad t = \frac{e}{v},$$

es decir:

$$\text{espacio} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}, \quad \text{tiempo} = \frac{\text{espacio}}{\text{velocidad}}.$$

1) Representación.

Representaremos por x la distancia (en kilómetros) desde A hasta el punto M de encuentro, es decir, la distancia recorrida por el primer móvil. La distancia recorrida por el segundo móvil (el que sale de B) será entonces $400 - x$, y tendremos:



	espacio	velocidad	tiempo
1er. móvil	x	45	$\frac{x}{45}$
2do. móvil	$400 - x$	35	$\frac{(400 - x)}{35}$

En la última columna se ha tenido en cuenta la fórmula $t = e/v$.

2) Planteo.

Como el tiempo empleado por ambos móviles para llegar a M es el mismo, resulta:

$$\frac{x}{45} = \frac{400 - x}{35}.$$

3) Resolución.

$$7x = 9(400 - x)$$

$$16x = 3600$$

$$x = 225.$$

Por consiguiente, los móviles se encontrarán a 225 km de A.

El tiempo que tardará el primer móvil en llegar a M será de $225/45 = 5$ horas.

4) Comprobación.

El segundo móvil recorrerá una distancia de $400 - 225 = 175$ km; y tardará en llegar a M, $175/35 = 5$ horas, lo que concuerda con el tiempo empleado por el primer móvil.

4. Son las tres de la tarde. ¿A qué hora coincidirán por primera vez las manecillas del reloj?

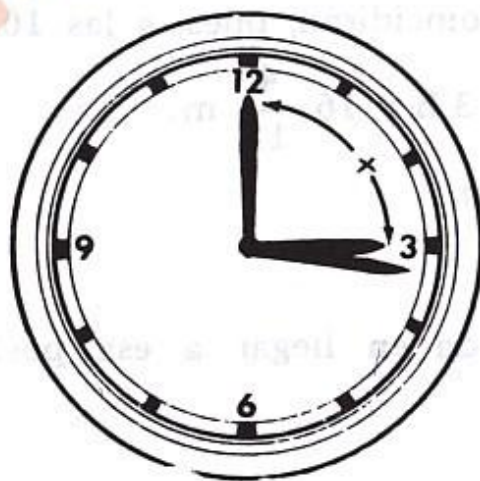
La técnica de la resolución de los problemas de reloj es análoga a la del problema 3 y se basa en la aplicación de la fórmula $t = e/v$.

Es costumbre utilizar la subdivisión en 60 partes de la periferia del reloj para medir con esta unidad, llamada *minuto*, los espacios recorridos por las manecillas del reloj. Así, por ejemplo, cuando el minutero pasa de las 12 a las 2, no se dice que ha girado 60° sino que ha recorrido 10 minutos. Cuando el horario pasa de las 6 a las 8, ha recorrido también un espacio de 10 minutos (para lo cual necesita un tiempo de 2 horas).

La velocidad con que camina el minutero es de 60 minutos por hora. La velocidad con que camina el horario es de 5 minutos por hora.

1) Representación.

Sea x la distancia (en minutos) que ha de recorrer el minu-



tero para alcanzar al horario. La distancia recorrida por el horario en el mismo tiempo será $x - 15$. Se tiene así el cuadro siguiente:

	espacio (en minutos)	velocidad (en minutos por hora)	tiempo (en horas)
minutero	x	60	$\frac{x}{60}$
horario	$x - 15$	5	$\frac{(x - 15)}{5}$

Planteo.

Puesto que el tiempo que emplean las manecillas en llegar al punto de coincidencia es el mismo para ambas, resulta la ecuación:

$$\frac{x}{60} = \frac{x - 15}{5}.$$

3) Resolución.

$$\begin{aligned} x &= 12(x - 15) \\ -11x &= -180 \\ x &= 16\frac{4}{11}. \end{aligned}$$

Las manecillas coincidirán, pues, a las $16\frac{4}{11}$ minutos después de las 3, o sea, a las 3 h y $16\frac{4}{11}$ m.

4) Comprobación.

El minutero tarda en llegar a esa posición $\frac{16\frac{4}{11}}{60} = \frac{3}{11}$ de hora.

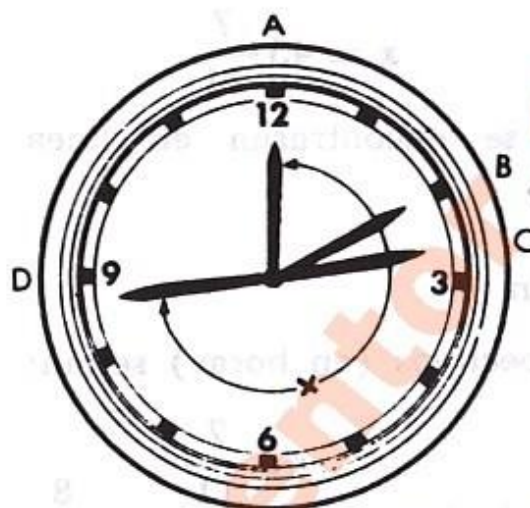
El horario tarda en llegar a la misma posición $\frac{1\frac{4}{11}}{5} = \frac{3}{11}$ de hora.

Nota. Se podría también medir el tiempo en minutos, pero resulta más claro para el principiante en la forma que lo hemos presentado.

5. ¿A qué hora, entre las 2 y las 3, se encuentran las manecillas del reloj en línea recta?

1) Representación.

Sea x la distancia que ha de recorrer el minutero (a partir



de las 2) para encontrarse en línea recta con el horario. Es decir, representemos por x la medida en minutos del arco ABCD:

$$x = ABCD = AB + BC + CD$$

Ahora bien, $AB = 10$ m. y $CD = 30$ m., luego se tiene

$$x = 40 + BC$$

de donde resulta que

$BC = x - 40 =$ distancia recorrida en el mismo tiempo por el horario.

Por tanto:

	espacio	velocidad	tiempo
minutero	x	60	$\frac{x}{60}$
horario	$x - 40$	5	$\frac{(x - 40)}{5}$

2) *Planteo.*

La igualdad de los tiempos de recorrido da

$$\frac{x}{60} = \frac{x - 40}{5}.$$

3) *Resolución.*

$$\begin{aligned} x &= 12(x - 40) \\ -11x &= -480 \end{aligned}$$

$$x = 43\frac{7}{11}.$$

Las manecillas se encontrarán en línea recta a las 2 h y $43\frac{7}{11}$ m.

4) *Comprobación.*

Los tiempos respectivos (en horas) serían:

$$\text{minutero: } \frac{43\frac{7}{11}}{60} = \frac{8}{11},$$

$$\text{horario: } \frac{3\frac{7}{11}}{5} = \frac{8}{11}.$$

El reloj como aparato trisector.

Se sabe que, en general, no puede dividirse un ángulo en tres partes iguales con la regla y el compás. Sin embargo, esta operación puede realizarse fácilmente con un reloj. Bastará situar el vértice del ángulo dado α en el centro de la esfera del reloj, hacer coincidir el lado inicial de α con la marca de las 12 y poner el reloj a las 12 en punto. Llevando el minutero a la posición del segundo lado de α , el horario habrá recorrido el ángulo $\alpha/12$; cuádruplicando este ángulo se obtendrá $\alpha/3$.

6. La velocidad de la corriente de un río es de 3 km por hora. Un bote tarda el mismo tiempo en navegar 8 km río abajo que en navegar 5 km río arriba. ¿Cuál es la velocidad del bote en agua tranquila?

En los problemas de este tipo haremos las hipótesis aproximadas siguientes:

1ª) El bote navega con movimiento uniforme.

2ª) La velocidad del bote (con respecto a la orilla) cuando navega río abajo es la suma de la velocidad del bote y de la velocidad de la corriente.

3ª) La velocidad (con respecto a la orilla) cuando navega río arriba es igual a la diferencia entre la velocidad del bote y la de la corriente.

1) Representación.

En el problema propuesto tendremos, llamando x a la velocidad del bote en agua tranquila:

	espacio	velocidad	tiempo
río abajo	8	$x + 3$	$\frac{8}{x + 3}$
río arriba	5	$x - 3$	$\frac{5}{x - 3}$

2) Planteo.

Puesto que el bote tarda el mismo tiempo en navegar 8 km río abajo que en navegar 5 km río arriba, se obtiene la ecuación:

$$\frac{8}{x + 3} = \frac{5}{x - 3}.$$

3) Resolución.

$$8(x - 3) = 5(x + 3)$$

$$8x - 24 = 5x + 15$$

$$8x = 39$$

$$x = 13.$$

La velocidad del bote en agua tranquila es, pues, de 13 km por hora.

4) Comprobación.

Navegando río abajo el bote demora $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ hora.

Navegando río arriba demora $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ hora.

EJERCICIO 89.

[En los problemas que siguen se entenderá que las velocidades que se mencionan son constantes.]

1º) La distancia entre A y B es de 300 km. Un móvil sale de A hacia B con una velocidad de 12 km por hora al mismo tiempo que otro móvil sale de B hacia A con una velocidad de 18 km por hora. ¿A qué distancia de A se encontrarán y cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

2º) Un automóvil sale de A hacia B a una velocidad de 80 km por hora al mismo tiempo que sale un ómnibus de B hacia A a 65 km por hora. Si la distancia AB es de 435 km, ¿a qué distancia de B se encontrarán y cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

3º) La distancia entre A y B es de 3 200 millas. Un avión sale de A hacia B a las 8 a. m. a una velocidad de 500 millas por hora. A las 9 a. m. sale otro avión de B hacia A con una velocidad de 400 millas por hora. Hallar a qué distancia de B se encontrarán los aviones y a qué hora.

4º) Un tren de carga sale de A hacia B a una velocidad de 45 km por hora; 2 horas después sale de A hacia B un tren de pasajeros a una velocidad de 55 km por hora. ¿A qué distancia de A encontrará el segundo tren al primero?

5º) Un camión sale de A hacia B a la 1 p. m., a una velocidad de 55 km por hora. A las 3 p. m. sale un automóvil de A hacia B a 85 km por hora. Si B se halla 100 km más distante que A, ¿a qué distancia de A y a qué hora encontrará el automóvil al camión?

6º) Juan viaja en automóvil a razón de 100 millas cada 2 horas. 6 horas después José sale en automóvil del mismo lugar y en el mismo sentido a razón de 260 millas cada 4 horas. ¿A qué distancia del lugar de partida alcanzará José a Juan? ¿Cuántas horas tardará?

7º) Un individuo dispone de 4 horas para ver una ciudad. Averiguar qué distancia puede recorrer en un ómnibus que va a 25 km por hora, si luego tiene que hacer el regreso a pie (por el mismo camino) a razón de 5 km por hora.

8º) Un joven sube una cuesta a razón de 4 km por hora y la baja a razón de 6 km por hora. Si en subir y bajar emplea en total $1\frac{1}{2}$ horas, ¿qué longitud tiene la cuesta?

9º) Un tren expreso sale de una estación 40 minutos después de haber salido un tren de carga y lo alcanza en 1 hora y 20 minutos. El tren expreso corre 20 km más por hora que el tren de carga. ¿Cuál es la velocidad del tren de carga?

10º) Un barco de carga que hace 15 nudos (15 millas náuticas por hora) está a 720 millas de Nueva York cuando un barco de pasajeros que hace 25 nudos sale de Nueva York en la misma dirección. ¿Qué distancia habrá recorrido el barco de pasajeros cuando el barco de carga le lleva todavía una ventaja de 100 millas?

11º) ¿A qué hora después de las 4 se encontrarán por primera vez las manecillas del reloj?

12º) Son las 10 en punto. ¿A qué hora se superpondrán por primera vez las manecillas?

13º) ¿A qué hora, entre las 6 y las 7, estarán superpuestas las manecillas?

14º) Averiguar a qué hora, entre las 3 y las 4, estarán las manecillas en prolongación una de otra.

15º) Son las 8. ¿A qué hora estarán por primera vez en línea recta las manecillas?

16º) ¿A qué hora, entre las 11 y las 12, están las manecillas en línea recta?

17º) ¿A qué hora, después de las 5, formarán por primera vez ángulo recto las manecillas?

18º) ¿A qué hora, después de las 7, formarán por primera vez ángulo recto las manecillas?

19º) ¿A qué hora, después de las 7, formarán por segunda vez ángulo recto las manecillas?

20º) ¿A qué hora, después de las 2 y no pasadas las 3, estarán en ángulo recto las manecillas? (Dos soluciones).

21º) Un bote tarda el mismo tiempo en navegar 20 km río arriba, que 28 km río abajo. Si la velocidad de la corriente del río es de 2 km por hora, ¿cuál es la velocidad del bote en agua tranquila?

22º) Pedro puede remar 8 km por hora en agua tranquila. En un río emplea el mismo tiempo en remar 5 km río arriba, que 15 km río abajo. ¿Cuál es la velocidad de la corriente del río?

23º) Una lancha de motor tiene una velocidad de 25 km por hora y puede navegar cierta distancia río abajo en dos tercios del tiempo que tarda en navegar la misma distancia río arriba. Hallar la velocidad de la corriente del río.

24º) Un avión puede volar 800 millas con un viento de cola de 15 millas por hora en el mismo tiempo que vuela 750 millas en contra del mismo viento. Hallar la velocidad del avión.

25º) Un avión que desarrolla una velocidad de 360 millas por hora (en aire tranquilo) navega 210 millas con viento de cola en el mismo tiempo que navega 190 millas con un viento de proa de la misma intensidad. ¿Cuál es la velocidad del viento?

105. Ecuaciones literales.

Reciben el nombre de *ecuaciones literales* aquéllas en que, además de la incógnita (o incógnitas), están representados por letras todos o algunos de los números que se suponen conocidos.

Para distinguir las letras que representan datos de aquéllas que representan incógnitas, *generalmente* se sigue el convenio de utilizar las primeras letras del alfabeto ($a, b, c, \dots$) para representar los datos y las últimas letras del alfabeto ($u, v, x, y, \dots$) para representar las incógnitas.

Ejemplos. Son ecuaciones literales las siguientes:

$$ax + b = 3bx - a$$

$$(b + y)(c + y) = y(y - 5)$$

$$ax + by = c.$$

De acuerdo con el convenio indicado anteriormente, se entenderá que en la primera ecuación x representa la incógnita y las letras a, b representan datos. En la segunda ecuación la incógnita es y y las letras b, c representan datos. Por último, en la tercera ecuación hay dos incógnitas x e y y tres datos, a, b, c . Nótese que las ecuaciones literales pueden **contener** también números, como sucede en los dos primeros ejemplos.

En las aplicaciones del Álgebra (a la Geometría, Física, Química, etc.) los elementos conocidos y desconocidos se representan a veces por las **iniciales** de los nombres correspondientes o por símbolos arbitrarios y, por consiguiente, no siempre se sigue el convenio mencionado **antes** sobre la significación de las primeras y últimas letras del alfabeto.

Así, por ejemplo, en la fórmula de las lentes

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

p y f pueden representar datos y p' la incógnita.

Para resolver las ecuaciones literales se aplican los mismos principios y métodos que hemos estudiado en §§ 60, 61, 102 y 103 para las ecuaciones numéricas.

Ejemplos.

$$1. \quad a^2x - a^2 = b^2x + b^2 + 2ab.$$

Escribiendo en el primer miembro solamente los términos que contienen x se tiene:

$$a^2x - b^2x = a^2 + 2ab + b^2.$$

Sacando ahora x factor común en el primer miembro resulta:

$$(a^2 - b^2)x = a^2 + 2ab + b^2.$$

Despejando x y simplificando:

$$x = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a + b)^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{a + b}{a - b}.$$

La solución obtenida es válida siempre que $a \neq b$.

$$2. \quad \frac{1}{b} + \frac{b}{x + b} = \frac{x + b}{bx}.$$

Multiplicando por bx se obtiene:

$$x + \frac{b^2x}{x + b} = x + b$$

que se reduce a

$$\frac{bx}{x + b} = 1 \quad \text{ó} \quad bx = x + b.$$

Luego,

$$(b - 1)x = b,$$

$$x = \frac{b}{b - 1}$$

si $b \neq 1$.

Nótese que para $b = 1$ la ecuación propuesta es imposible, pues, se reduce a $0 = 1$.

EJERCICIO 90.

Resolver las ecuaciones siguientes:

1º) $ax - 2b = 3b$

2º) $ax + c = x + b$

3º) $ax + 4b^2 = 2bx + a^2$

4º) $x^2 - c^2 = (b - x)^2$

5º) $2x + a(x + 3) = 2a$

6º) $(a + x)(b + x) = x(x - a)$

7º) $(x + a)(x - b) = x(x + b)$

8º) $(c + y)(c - y) = (3c^2 - y)y$

9º) $(z - a)^2 - (z - b)^2 = (a + b)^2$

10º) $(x - a)^2 = (x + b)(x - b) + 2ax$

$$11^\circ) \frac{x+1}{x-1} = \frac{a-b}{a+b}$$

$$12^\circ) \frac{b}{a+bx} = \frac{x}{b+x^2}$$

$$13^\circ) \frac{x}{m} + \frac{x}{n} - \frac{x}{p} = a$$

$$14^\circ) \frac{a+b}{x+3} = \frac{a-b}{x-3}$$

$$15^\circ) \frac{9x-a}{3x-b} = \frac{6x+b}{2x+a}$$

$$16^\circ) \frac{(x+a)^2}{4x-b} = \frac{x+b}{4}$$

$$17^\circ) \frac{\frac{mx+k}{m}}{\frac{x}{k}} = \frac{\frac{mx-k}{m}}{\frac{x}{m}}$$

$$18^\circ) \frac{\frac{ax+c}{x}}{a} = \frac{\frac{x+a}{a}}{x}$$

$$19^\circ) \frac{2}{a} + \frac{a}{x-a} = \frac{2x+a}{ax}$$

$$20^\circ) \frac{a}{a-b} - \frac{x}{a+b} = \frac{bx}{a^2-b^2}$$

$$21^\circ) \frac{x-a}{x+a} + \frac{2a+2b}{x} = \frac{x+b}{x-b}$$

$$22^\circ) \frac{cx}{a} - \frac{x-a}{3b} + \frac{x+a}{2} = a+c$$

$$23^\circ) \frac{9a+bx}{3a} + \frac{4b-ax}{2b} - \frac{x+12c}{4c} = 2$$

$$24^\circ) \frac{bx-a}{bx+a} - \frac{2a}{bx-a} = \frac{b^2x^2+a^2}{b^2x^2-a^2}$$

$$25^\circ) \frac{1}{ab-by} - \frac{2}{ac-ay} = \frac{3}{bc-by}$$

$$26^\circ) \frac{ax+c}{cx-a} - \frac{ax}{cx+a} = \frac{4c}{c^2x^2-a^2}$$

$$27^\circ) a \frac{x-6c}{3b} - b \frac{x-4a}{2c} = \frac{(2a-3c)x}{6b}$$

$$28^\circ) \frac{a}{z+2} + \frac{b}{z+3} - \frac{4a+3b}{z^2+5z+6} = 0$$

$$29^\circ) \frac{a+x}{a+1} + \frac{b+x}{b+1} = \frac{a-x}{a-1} + \frac{b-x}{b-1}$$

$$30^\circ) \frac{12a-x}{4a} + \frac{10b+x}{5b} - \frac{6c+ax}{3c} = \frac{15d+x}{5d}$$

106. Problemas generales.

Se llaman *problemas generales* o *literales* aquéllos en que los datos se representan por letras.

Uno de los principales fines del Álgebra es la resolución de estos problemas generales, cuyos datos no son valores numéricos especificados. La importancia de ellos consiste en que su resolución conlleva la de infinitos problemas particulares del mismo tipo, los cuales resultan asignando valores numéricos diversos a las letras que intervienen en el problema general.

La síntesis que de este modo se logra supone, en primer lugar, una gran economía de esfuerzo, ya que de una vez se resuelven todos los problemas de la misma clase; y, además permite analizar y clasificar las diversas situaciones y casos especiales que puede presentar el problema. Este estudio de los diversos aspectos, posibilidades y casos especiales recibe el nombre de *discusión del problema*.

En los problemas de Matemática aplicada, a la discusión sigue la interpretación concreta de los diversos resultados que se obtienen.

Suele llamarse *fórmula* a la expresión más o menos complicada que representa la solución general del problema.

Ejemplos.

1. PROBLEMA DE LAS EDADES. La edad actual de un padre es de t años y la de su hijo es de t' años. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será k veces la del hijo?

1) Representación.

Sea x el número de años que han de transcurrir. Tendremos:

	edad actual de cada uno	edad de cada uno dentro de x años
padre	t	$t + x$
hijo	t'	$t' + x$

2) Planteo.

Puesto que dentro de x años la edad del padre ha de ser k

veces la edad del hijo, resulta

$$t + x = k(t' + x).$$

3) Resolución.

$$t + x = kt' + kx$$

$$(k - 1)x = t - kt'$$

$$x = \frac{t - kt'}{k - 1}.$$

4) Discusión.

La fórmula anterior no es válida para $k = 1$, pero en este caso el problema es evidentemente imposible, pues equivale a preguntar: ¿dentro de cuántos años la edad del padre será igual a la del hijo?

Si $t = kt'$ resulta $x = 0$, lo que significa: actualmente la edad del padre es k veces la edad del hijo.

Si $k > 1$ y $t < kt'$ el numerador de la fórmula es negativo en tanto que el denominador es positivo. El valor resultante para x será, por consiguiente, negativo. Ello significa: hace x años la edad del padre fué k veces la edad del hijo. El acontecimiento ocurrió en el pasado y no volverá a ocurrir en el futuro.

Ejemplo. Si $t = 30$, $t' = 9$, $k = 4$, se obtiene $x = -2$, lo que quiere decir: hace 2 años la edad del padre era 4 veces la edad del hijo.

2. PROBLEMA DE LOS TRABAJADORES. *A puede hacer una obra en a días y B puede hacerla en b días. ¿Cuánto tiempo tardarán en hacerla trabajando juntos?*

1) Representación.

	Tiempo que demoran en hacer la obra	Parte de la obra que hacen en 1 día
A	a	$\frac{1}{a}$
B	b	$\frac{1}{b}$
A y B	x	$\frac{1}{x}$

2) *Planteo.*

La parte de la obra que hace A en un día más la parte que hace B, da la parte de la obra que hacen en un día trabajando conjuntamente. Por tanto:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x}.$$

3) *Resolución.*

$$\frac{b+a}{ab} = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$

Esta fórmula permite resolver todos los problemas de este tipo sin más que sustituir en ella los valores particulares de los datos. Así, por ejemplo, en el problema 12 del ejercicio 88, se tiene $a = 15$, $b = 10$, luego

$$x = \frac{15 \times 10}{15 + 10} = \frac{150}{25} = 6 \text{ días.}$$

Los problemas de caños son esencialmente del mismo tipo y se pueden resolver también por la fórmula anterior*.

4) *Discusión.*

Observaremos solamente que siendo a y b positivos por hipótesis, se tiene $a < a + b$, o bien,

$$\frac{a}{a+b} < 1$$

y multiplicando por b :

$$\frac{ab}{a+b} < b \quad \text{ó} \quad x < b.$$

Análogamente se ve que $x < a$.

* No es recomendable que los principiantes resuelvan problemas particulares mediante la aplicación de fórmulas (excepto en ciertos casos: problemas de interés, áreas y volúmenes en Geometría, etc.), ya que ello tiende a mecanizar excesivamente su labor en detrimento del desarrollo de la facultad de razonar. Sin embargo, cuando el alumno va adquiriendo cierta madurez debe propenderse al empleo de fórmulas generales (sin exigir necesariamente que las memorice), pues precisamente estas síntesis constituyen, como hemos señalado, una de las finalidades del Álgebra y, pudiéramos añadir, de la ciencia en general.

3. PROBLEMA DE LOS MÓVILES. Un móvil pasa por A en dirección a B a una velocidad (constante) de v metros por hora, al mismo tiempo que otro móvil pasa por B en el mismo sentido



(alejándose de A) a una velocidad de v' metros por hora. Si la distancia entre A y B es de d metros, hallar a qué distancia de A se encontrarán los móviles y cuánto tiempo demorarán en encontrarse.

1) Representación.

Llamemos x a la distancia AM, desde A hasta el punto de encuentro M. Tendremos entonces $BM = x - d$ y teniendo en cuenta la fórmula del tiempo en el movimiento uniforme, a saber, $t = e/v$, resulta el cuadro siguiente:

	espacio	velocidad	tiempo
1er. móvil	x	v	$\frac{x}{v}$
2do. móvil	$x - d$	v'	$\frac{(x - d)}{v'}$

2) Planteo.

Puesto que los móviles emplean el mismo tiempo en recorrer las distancias AM y BM respectivamente, se tiene:

$$\frac{x}{v} = \frac{x - d}{v'}$$

3) Resolución.

$$v(x - d) = v'x$$

$$[1] \quad (v - v')x = vd$$

$$x = \frac{vd}{v - v'}$$

Esta fórmula proporciona la distancia de A a que se encontrarán los móviles. El tiempo que tardarán en encontrarse vendrá dado por

$$t = \frac{x}{v} = \frac{d}{v - v'}.$$

4) *Discusión.*

Supondremos $d > 0$, $v > 0$ y distinguiremos tres casos:

a) Si $v > v'$, las fórmulas anteriores dan como resultado números positivos, lo que significa que el encuentro ocurre a la derecha de A (ver en la fig. anterior) y con posterioridad al momento en que los móviles pasan por A y B, respectivamente.

b) Si $v = v'$ las fórmulas obtenidas no son válidas. La ecuación [1] conduce al absurdo $0 = vd$, lo que significa que el problema no tiene solución en este caso. En efecto, puesto que el primer móvil tiene la misma velocidad que el segundo y están separados una cierta distancia ($d > 0$), conservan la misma distancia todo el tiempo y el primer móvil no puede alcanzar al segundo.

c) Si $v < v'$ las fórmulas dan resultados negativos para x y t . Ello significa: los móviles se encuentran a la izquierda de A, antes de su paso por A y B respectivamente.

EJERCICIO 91.

1º) La suma de dos números es s y su diferencia es d . Hallar los números.

2º) Un número es k veces otro y su suma es s . Hallar los números.

3º) Pedro tiene p pesos y Luis tiene q pesos. Pedro da cierto número de pesos a Luis y entonces tiene k veces lo que tiene Luis. ¿Cuántos pesos le dió Pedro a Luis?

4º) El denominador de una fracción excede en m unidades al numerador. Si a cada término de la fracción se le suma h resulta una fracción equivalente a a/b . Hallar la fracción original.

5º) A puede hacer una obra en a días, B puede hacerla en b días y C en c días. ¿En cuánto tiempo la harán trabajando juntos?

6º) Un tanque se puede llenar por un grifo en h horas y por otro en k horas. Un desagüe lo puede vaciar en m horas. Si se abren simultáneamente los grifos y el desagüe, ¿en qué tiempo se llenará el tanque?

7º) Un móvil sale de A hacia B a una velocidad de v km por hora, al mismo tiempo que otro móvil sale de B hacia A a una velocidad de v' km por hora. Si la distancia AB es de d km, ¿a qué distancia de A se encontrarán y cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

8º) Un bote tarda el mismo tiempo en navegar k kilómetros río abajo que k' kilómetros río arriba. Si la velocidad de la corriente del río es de v km por hora, averiguar la velocidad del bote en agua tranquila.

9º) El minuterio de un reloj está m minutos detrás del horario. ¿Dentro de qué tiempo coincidirán por primera vez las manecillas?

10º) El minuterio de un reloj está m minutos detrás del horario. ¿Dentro de qué tiempo estará (por primera vez) n minutos delante del horario?

107. Fórmulas.

Ya en § 35 definimos la fórmula como una igualdad cualquiera entre expresiones algebraicas que expresa un principio, regla o resultado general de matemática pura o aplicada.

Ejemplos.

1. $A = \pi r^2$ (área del círculo).

2. $e = vt$ (ley del movimiento uniforme).

3. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ (fórmula de las lentes).

En general, en las fórmulas aparece despejada una de las letras, pero no siempre es así necesariamente, como se ve arriba en el ejemplo 3.

Despejar una letra cualquiera en una fórmula equivale a resolver una ecuación literal cuya incógnita es la letra que se quiere despejar. Por tanto, para resolver este problema (frecuente en Geometría, Física, etc.) se emplearán precisamente los métodos que hemos estudiado para la resolución de las ecuaciones literales.

Algunos autores llaman *sujeto* a la letra que aparece despejada en una fórmula; *cambiar de sujeto* es proceder a despejar alguna otra letra. Estas denominaciones han caído en desuso.

Ejemplos.

1. En la fórmula de las lentes

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

despejar p' .

Pasando la primera fracción al segundo miembro se tiene:

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

Efectuando la operación indicada en el segundo miembro:

$$[1] \quad \frac{1}{p'} = \frac{p - f}{fp}$$

Suprimiendo los denominadores (o bien, teniendo en cuenta que en una proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios):

$$fp = p'(p - f),$$

de donde:

$$\frac{fp}{p - f} = p'.$$

Se puede también obtener el mismo resultado invirtiendo ambas razones en la proporción [1].

2. En la fórmula del importe o monto

$$c(100 + rt) = 100M$$

despejar t .

Suprimiendo paréntesis:

$$100c + crt = 100M.$$

Dejando aislado en el primer miembro el término que contiene t :

$$crt = 100M - 100c.$$

Dividiendo por cr (y sacando 100 factor común en el segundo miembro):

$$t = \frac{100(M - c)}{cr}.$$

3. En la fórmula

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

despejar F .

Se obtiene sucesivamente:

$$9C = 5(F - 32)$$

$$\frac{9}{5}C = F - 32$$

$$\frac{9}{5}C + 32 = F.$$

4. En la fórmula

$$F = \frac{w}{2R}(R - r)$$

despejar R.

Multiplicando por $2R$, para suprimir el denominador, se obtiene:

$$2RF = w(R - r)$$

o bien

$$2RF = wR - wr.$$

Escribiendo en el primer miembro los términos que contienen R:

$$2RF - wR = -wr.$$

Sacando R factor común:

$$R(2F - w) = -wr$$

$$R = \frac{-wr}{2F - w}.$$

Cambiando de signo al numerador y al denominador, el resultado anterior se puede escribir también:

$$R = \frac{wr}{w - 2F}.$$

EJERCICIO 92.

En las fórmulas siguientes despejar las letras que se indican:

1º) $F = k \frac{mm'}{r^2}$ despejar m .

$$2^\circ) \quad V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \text{despejar } h.$$

$$3^\circ) \quad s = \frac{n}{2} (a + l) \quad \text{despejar } l.$$

$$4^\circ) \quad l = a + (n - 1)d \quad \text{despejar } n.$$

$$5^\circ) \quad e = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{despejar } v_0.$$

$$6^\circ) \quad v = v_0(1 + at) \quad \text{despejar } t.$$

$$7^\circ) \quad l = \pi s(r + r') \quad \text{despejar } r'.$$

$$8^\circ) \quad i = \frac{E}{r + R} \quad \text{despejar } r.$$

$$9^\circ) \quad u = \frac{v}{1 + v} \quad \text{despejar } v.$$

$$10^\circ) \quad s = \frac{lr - a}{r - 1} \quad \text{despejar } r.$$

$$11^\circ) \quad R = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \quad \text{despejar } r_2.$$

$$12^\circ) \quad i = \frac{E}{R + \frac{r}{2}} \quad \text{despejar } R.$$

$$13^\circ) \quad R = \frac{2ab}{1 - 2b} \quad \text{despejar } b.$$

$$14^\circ) \quad I = i \frac{r + r'}{r'} \quad \text{despejar } r'.$$

$$15^\circ) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = (n - 1) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \quad \text{despejar } R.$$

EJERCICIO 93 (REPASO).

I. Resolver las ecuaciones siguientes:

$$1^\circ) \quad x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 22$$

$$2^\circ) \quad \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = x - 6$$

$$3^{\circ}) \quad \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{x}{6} + \frac{x}{8} + \frac{x}{12} + 4,25$$

$$4^{\circ}) \quad \frac{2x+1}{3} + \frac{3x-1}{4} - \frac{3x+1}{6} = \frac{7}{4}$$

$$5^{\circ}) \quad \frac{3x+2}{13} + \frac{2x+3}{39} = \frac{1}{3} + \frac{7x-1}{26}$$

$$6^{\circ}) \quad 8 - \left(\frac{5x+1}{6} + \frac{3x+2}{5} \right) = 4 + \left(\frac{x+2}{3} + \frac{3x+1}{4} \right)$$

$$7^{\circ}) \quad \frac{3x+4}{5} + \frac{2x+5}{3} = \frac{6x+3}{15} + 2x$$

$$8^{\circ}) \quad \frac{5}{x+2} + \frac{10}{3(x+2)} - \frac{15}{2(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$9^{\circ}) \quad \frac{6}{x+4} - \frac{x+4}{x-4} + \frac{7x^2+50}{3(x^2-16)} = \frac{4}{3}$$

$$10^{\circ}) \quad \frac{4}{x^2-x-2} + \frac{4}{x^2-1} = \frac{3}{x^2-3x+2}$$

$$11^{\circ}) \quad \frac{5x-2}{5x+2} + \frac{80}{25x^2-4} = \frac{5x+2}{5x-2}$$

$$12^{\circ}) \quad \frac{3}{1+\frac{2}{x}} - \frac{2}{1+\frac{3}{x}} = \frac{x^2+2,5}{x^2+5x+6}$$

$$13^{\circ}) \quad \frac{3x+1}{10} - \frac{2x^2+x-21}{100x+50} = \frac{7x+4}{25}$$

$$14^{\circ}) \quad \frac{x+9}{7} + \frac{x^2+4}{2x+3} = \frac{9x-80}{14}$$

$$15^{\circ}) \quad \frac{4x+3}{3} - \frac{2x^2+7}{4(x+2)} + \frac{1}{8} = \frac{10x+3}{12}$$

$$16^{\circ}) \quad \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+5}$$

$$17^{\circ}) \quad \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

$$18^\circ) \frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6}$$

$$19^\circ) \frac{x+a}{2} + \frac{bx}{a} + \frac{a-x}{b} = b+x$$

$$20^\circ) \frac{x}{ab} + \frac{x}{bc} + \frac{x}{ac} + (a+b+c)x = abc + 1$$

$$21^\circ) \frac{x+a}{a} - \frac{x-a+b}{b} + x = \frac{x-a+c}{c} + \frac{x+2a}{3}$$

$$22^\circ) \frac{x}{a+b} - \frac{a+b-x}{x} = \frac{x}{a-b} - \frac{2bx}{a^2-b^2}$$

$$23^\circ) \frac{y-c}{y-4a} - \frac{16a^2-c^2}{y^2-16a^2} = \frac{y+c}{y+4a}$$

$$24^\circ) \frac{x+a+b}{x+a} = \frac{x+a-b}{x-a} - \frac{a^2+b^2}{x^2-a^2}$$

$$25^\circ) \frac{x-2}{x+a-4} = \frac{2-x}{x-a+2} + 2$$

II. Resolver los siguientes problemas:

1º) La cuarta parte de un número más su décima parte, es igual a la quinta parte del número aumentada en 15 unidades. Hallar el número.

2º) El denominador de una fracción es 5 unidades mayor que el numerador. Si a cada término de la fracción se resta 2 unidades, la fracción resultante es reducible a $1/2$. ¿Cuál es la fracción original?

3º) Un muchacho obtiene un premio del cual invierte $1/6$ en una excursión, $1/4$ en libros, y $1/5$ del resto en otros gastos. Si ahorró 140 \$, ¿de cuánto es el premio?

4º) La fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

da, en electricidad, la resistencia R equivalente a dos resistencias r_1 y r_2 conectadas en paralelo. ¿Cuál es la resistencia equivalente a dos resistencias de 200 ohms y de 120 ohms conectadas en paralelo? ¿Cuántos ohms debe tener una resistencia que conectada en paralelo con otra resistencia de 300 ohms da una resistencia efectiva de 180 ohms?

5º) A y B trabajando conjuntamente pueden descargar un camión en 3 h $3/4$. A, solo puede descargarlo en 10 horas. ¿Cuánto tiempo tardará B trabajando solo?

6º) En un gran premio, el campeón mundial Fangio no lograba desprenderse de un seguidor. A los 32 minutos de carrera, durante los cuales ambos habían recorrido 80 km, optó por hacer cambiar las bujías de su coche, lo que le detuvo 3,6 minutos. De nuevo en carrera, consiguió una velocidad de 100 km cada 32 minutos. ¿Al cabo de cuántos kilómetros alcanzó a su rival, que no había variado la velocidad?

7º) En una fábrica de aeroplanos hay 3 líneas de montaje que pueden montar cada una 12 aeroplanos en 30 días y hay otras 2 líneas que pueden montar cada una 12 aeroplanos en 40 días. ¿En cuánto tiempo las 5 líneas pueden montar 12 aeroplanos?

8º) Un tanque se puede llenar por una llave en 6 horas y por otra en 4 horas. Un desagüe lo vacía en 12 horas. Si se abren a la vez las dos llaves y el desagüe, ¿en cuánto tiempo el tanque quedará mediado de agua?

9º) Debido a que el desagüe no se había cerrado, una piscina tardó 10 horas en llenarse. Con el desagüe cerrado se hubiera llenado en 4 horas. ¿Cuánto tiempo demorará vaciar la piscina con las llaves cerradas y el desagüe abierto?

10º) Un tren de carga sale de A hacia B a las 6 a.m. a una velocidad de 45 km por hora. A las 11 a.m. sale también de A y en dirección a B, un tren de pasajeros a una velocidad de 60 km por hora. ¿A qué hora alcanzará el segundo tren al primero?

11º) A las 2 p.m. sale un ómnibus de A hacia B a una velocidad de 80 km por hora. A las 4 p.m. sale un automóvil de B hacia A a una velocidad de 70 km por hora. Si la distancia entre A y B es de 300 km, ¿a qué distancia de A se encontrarán y a qué hora?

12º) Dos trenes salen de la misma ciudad y a la misma hora en sentidos opuestos. A las 3 horas y media se encuentran uno de otro a 392 km de distancia. Si la velocidad del primero es $\frac{3}{4}$ de la velocidad del segundo, ¿cuál es la velocidad de cada uno?

13º) Si el reloj marca las 6, ¿a qué hora coincidirán por primera vez las manecillas?

14º) ¿A qué hora, entre la 1 y las 2, están las manecillas en línea recta?

15º) ¿A qué hora, entre las 2 y las 3, forman por primera vez ángulo recto las manecillas?

16º) Cuando la velocidad de la corriente de un río es de 2 km por hora, Juan puede ir en su bote 12 km río abajo en el mismo tiempo que recorre 15 km río abajo cuando la velocidad de la corriente es de 4 km por hora. ¿Cuál es la velocidad del bote en agua tranquila?

17º) Navegando a toda velocidad en contra de la corriente de un río, una lancha de motor hace 18 km en el mismo tiempo que a favor de la corriente haría 24 km. Si la velocidad de la corriente del río es de 3 km por hora, ¿cuál es la velocidad máxima del bote en agua tranquila?

18º) Un muchacho sube una loma a razón de 2 km por hora y luego

se desliza hacia abajo a 10 km por hora. Si en subir y bajar emplea 36 minutos en total, ¿que distancia hay desde la base a la cima de la loma?

19º) Un viajero hace parte de la jornada en tren a 80 km por hora y parte en avión a 300 km por hora. Si en total viajó 1600 km en 9 horas, hallar la distancia que recorrió en avión.

20º) La velocidad de un aeroplano en aire tranquilo es de 240 km por hora. El volar 800 km en contra del viento le toma $\frac{8}{7}$ del tiempo que le tomaría volar la misma distancia a favor del viento. Hallar la velocidad del viento.

21º) El numerador de una fracción excede al denominador en m unidades. Si a cada término de la fracción se resta k , la fracción resultante es equivalente a a/b . Hallar la fracción original.

22º) A y B trabajando juntos hacen una obra en c días. B solo demora b días. ¿En cuántos días hará A la obra si trabaja solo?

23º) Un tren que se mueve con una velocidad de v km por hora lleva h horas de adelanto a un segundo tren cuya velocidad es de v' km por hora. ¿Dentro de cuántas horas el segundo tren alcanzará al primero?

24º) El minuterio de un reloj está b minutos delante del horario ($b < 30$). ¿Dentro de cuánto tiempo estará una manecilla en prolongación de la otra?

25º) Un avión tarda el mismo tiempo en navegar k km a favor del viento que k' km en contra del viento. Si en aire tranquilo la velocidad del avión es de v km por hora, hallar la velocidad del viento.

III. En las fórmulas siguientes, despejar la letra que se indica:

1º) $E = I \left(R + \frac{r}{n} \right)$ despejar r .

2º) $\frac{n}{v} = \frac{m}{M + m}$ despejar m .

3º) $s = \frac{lr - a}{r - 1}$ despejar l .

4º) $s = \pi r(r + g)$ despejar g .

5º) $\frac{a}{w} = \frac{b}{u} + \frac{c}{v}$ despejar v .

6º) $V = \frac{1}{3} \pi h^2(3r - h)$ despejar r .

7º) $V = \frac{h}{3} (B + B' + 4B'')$ despejar B' .

8º) $s = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$ despejar d .

9º) $Q = \frac{w}{g} (v_1 - v_0)$ despejar v_0 .

10º) $A = [0 - (n - 2)\pi]r^2$ despejar n .

11º) En la fórmula $s = \frac{n}{2} (a + l)$ calcular a cuando $s = 96$, $n = 8$, $l = 20$.

12º) En la fórmula $i = \frac{E}{r + R}$ calcular R cuando $i = 4$, $E = 60$, $r = 8$.

13º) En la fórmula $R = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ calcular r_1 cuando $R = 4,8$, $r_2 = 12$.

14º) En la fórmula $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ calcular p' cuando $p = 5,4$, $f = 4,8$.

15º) En la fórmula $I = i \frac{r + r'}{r'}$ calcular r cuando $I = 60$, $i = 40$, $r' = 9$.

TEST 11.

1º) Señalar cuál de los valores siguientes es raíz de la ecuación

$$\frac{6x + 1}{2} = \frac{9x - 2}{3} + \frac{7}{2x}:$$

a) $x = 2$

b) $x = -1$

c) $x = 3$.

2º) Señalar cuál de los valores siguientes es raíz de la ecuación

$$\frac{ax}{b} + \frac{x - a - b}{a} = \frac{x - b}{c} + a - \frac{x}{b}.$$

a) $x = a$

b) $x = b$

c) $x = a + b$.

3º) Resolver la ecuación:

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} = \frac{6}{3x - 5}.$$

4º) Resolver la ecuación:

$$\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x - 3} + \frac{1}{x - 4} = 0.$$

5º) Resolver la ecuación:

$$\frac{x + b}{x + a} + \frac{x + b}{x - a} = \frac{2x^2}{x^2 - a^2}$$

6º) Dada la fórmula $F = \frac{w}{2r} (r + r')$ despejar r . Hallar el valor de r cuando $F = 20$, $w = 5$, $r' = 14$.

7º) Una bala que tiene una velocidad de 2 200 pies por segundo se oye dar en el blanco 4,2 segundos después de haberse disparado el tiro. Si la velocidad del sonido en el aire es de 1 100 pies por segundo, ¿a qué distancia, en pies, se encuentra el blanco del lugar del disparo?

8º) Un bote navega 7 km río arriba, en el mismo tiempo que invierte en hacer 11 km río abajo. Si la velocidad de la corriente del río es de $\frac{2}{3}$ km por hora. ¿Cuál es la velocidad del bote en agua tranquila?

9º) Las manecillas del reloj están superpuestas. ¿Dentro de cuánto tiempo estará una en prolongación de la otra?

10º) A puede hacer un trabajo en 8 días y B en 12 días. A trabaja un cierto número de días y luego es sustituido por B que termina la obra. Entre los dos demoran 11 días. ¿Cuántos días trabajó cada uno?

Horas	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Temperatura T	25	30	35	40	45	50	55	60	65

Temperatura t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Espesor e	2	10	12	15	18	20	22	25	28	30

CAPÍTULO 12.

FUNCIONES Y GRÁFICOS.

108. Valores correspondientes. Coordenadas rectangulares.

Si dos magnitudes están relacionadas de alguna manera es a menudo útil disponer los pares de valores correspondientes uno debajo de otro (o uno frente a otro) en un cuadro o tabla.

Así, por ejemplo, la temperatura en un lugar en cierto día del año depende de la hora del día. Las lecturas termométricas (en grados centígrados) obtenidas a distintas horas se pueden disponer como muestra la siguiente tabla:

TABLA 1

Horas H	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Temperaturas T	25	30	35	32	28	26	20	18	17,5

En esta tabla la 0 hora corresponde a las 12 meridiano.

La fórmula

$$e = 5t$$

da en metros la distancia o espacio recorrido por un cuerpo que se mueve uniformemente con una velocidad de 5 metros por segundo. Utilizando esta fórmula se puede construir la siguiente tabla que muestra las distancias recorridas por el cuerpo en 1 segundo, 2 segundos, 3 segundos, etc.

TABLA 2

Tiempo t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Espacio e	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

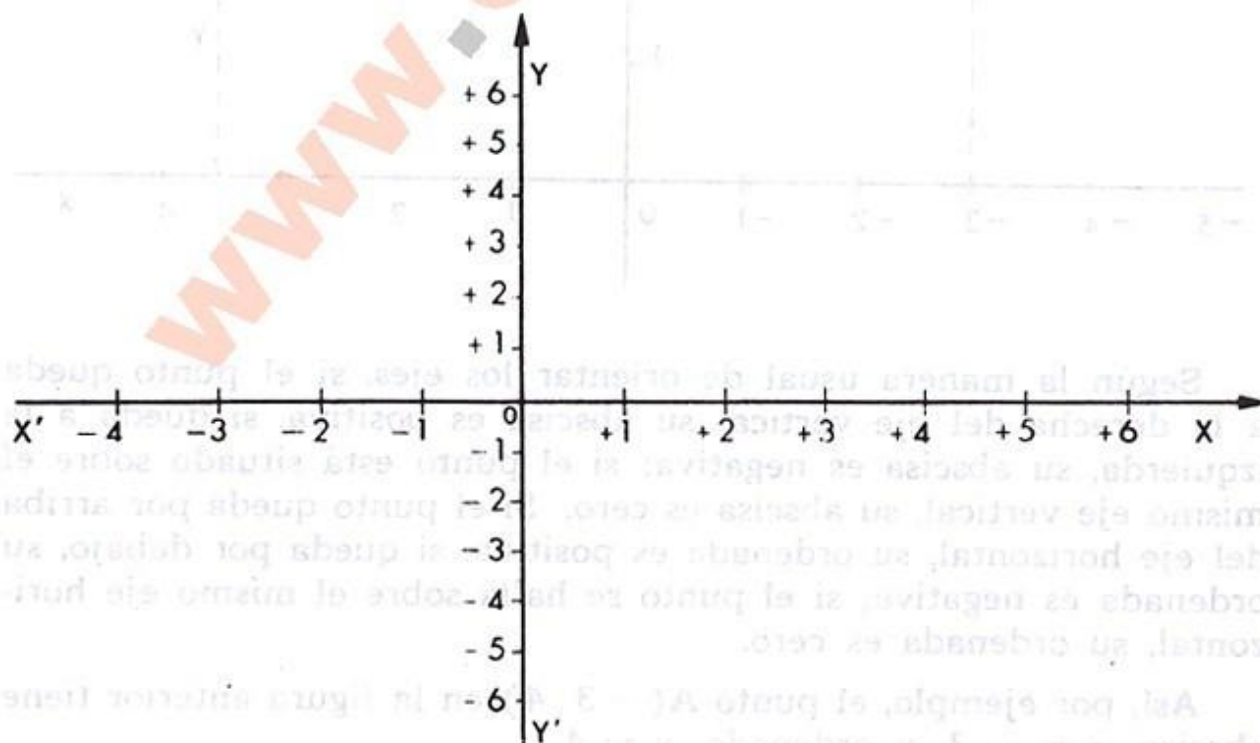
Además de colocar algunos pares de valores correspondientes en forma de cuadro o tabla, puede darse una idea más intuitiva de la naturaleza de la relación que existe entre las magnitudes consideradas, mediante un gráfico o dibujo geométrico. Hay distintas maneras de obtener un gráfico representativo. Trataremos primero sobre el llamado sistema cartesiano de coordenadas rectangulares.

La denominación de *cartesiano* se ha adoptado en honor de Descartes, filósofo y matemático francés, que fué el originador de este sistema en su célebre ensayo "La Géométrie" (1637).

Un sistema de coordenadas rectangulares consiste en dos rectas perpendiculares $X'X$ é $Y'Y$ sobre las cuales se establecen escalas numéricas (véase § 11) con origen común en el punto de intersección O de estas rectas. Por este motivo el punto O recibe el nombre de *origen* del sistema.

La recta $X'X$ se traza generalmente paralela al borde inferior del papel y se le llama *eje horizontal* o *eje de abscisas*. A la recta $Y'Y$ se le llama *eje vertical* o *eje de ordenadas*.

La unidad de longitud que se adopta para el eje vertical puede ser igual o distinta a la unidad adoptada para la escala horizontal. En esta figura, la unidad de la escala vertical es la mitad de la unidad escogida para el eje horizontal. En la figura

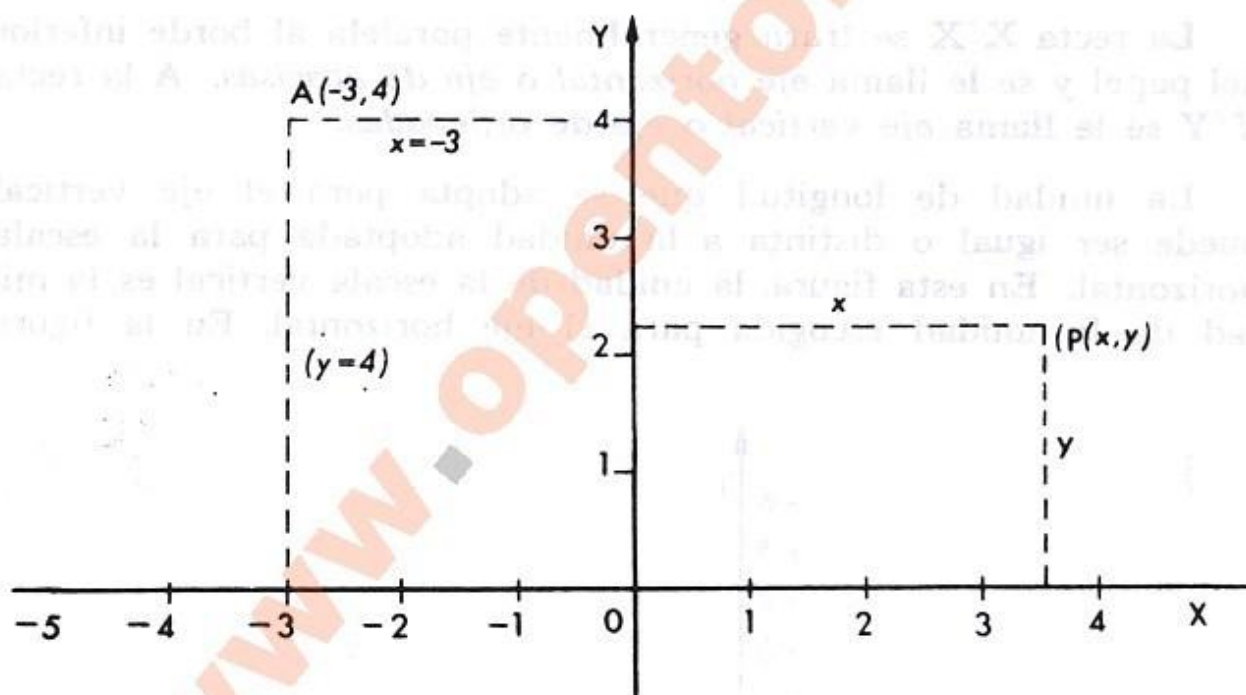


siguiente, se han tomado unidades iguales. Siempre se deben señalar con claridad las unidades en las escalas correspondientes.

Es costumbre indicar con una flecha la parte *positiva* de cada eje, es decir, la semirrecta cuyos puntos se ponen en correspondencia con los números reales positivos.

En un sistema de coordenadas, la posición de cada punto del plano queda determinada por sus distancias a los ejes. Esas distancias se llaman *coordenadas* del punto. La distancia horizontal se denomina *abscisa* del punto; y la distancia vertical, *ordenada* del punto.

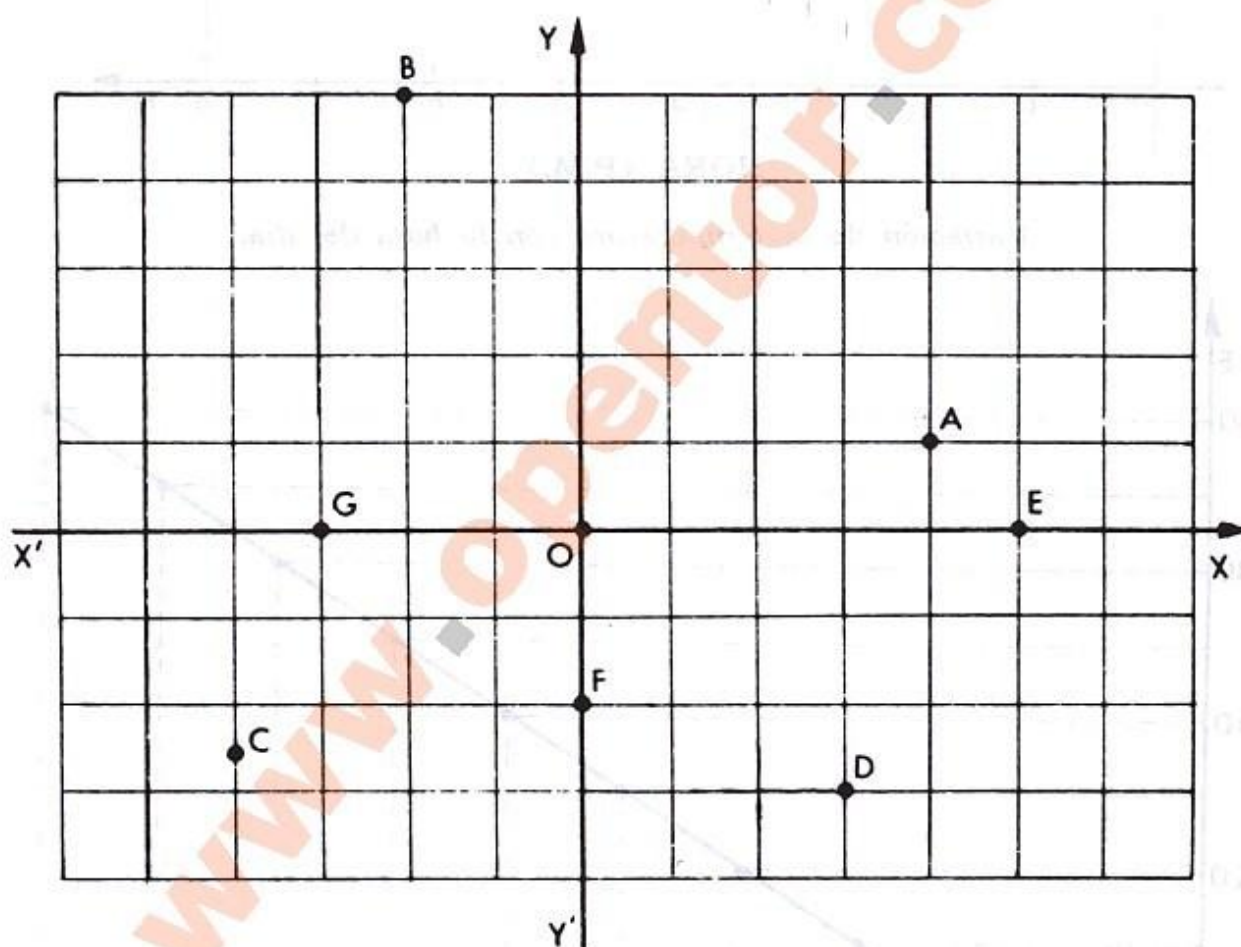
El punto P , cuya abscisa es x y cuya ordenada es y , se designa por (x, y) o por $P(x, y)$. Siempre se escribe primero el número que representa la abscisa, seguido del número que representa la ordenada.



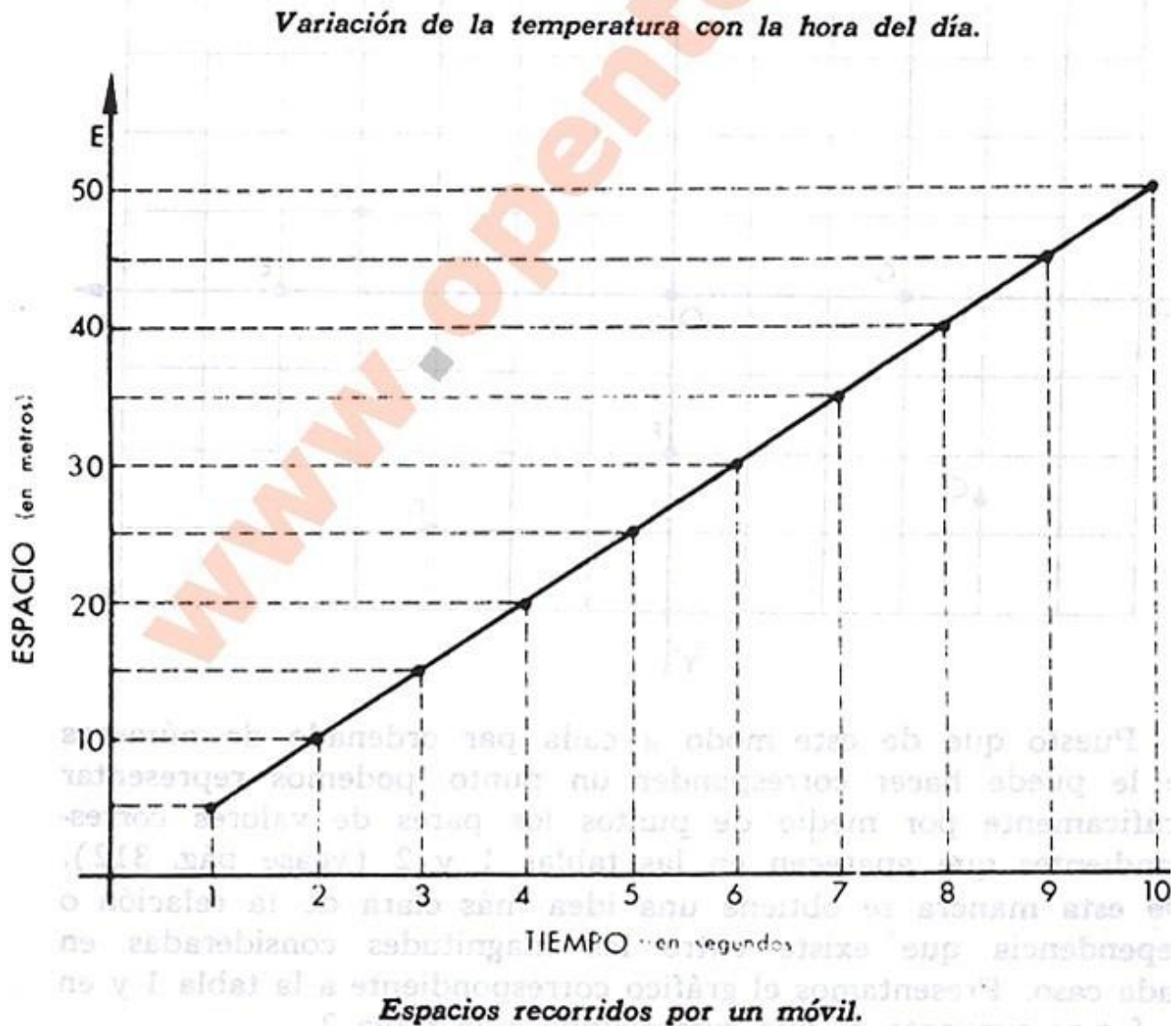
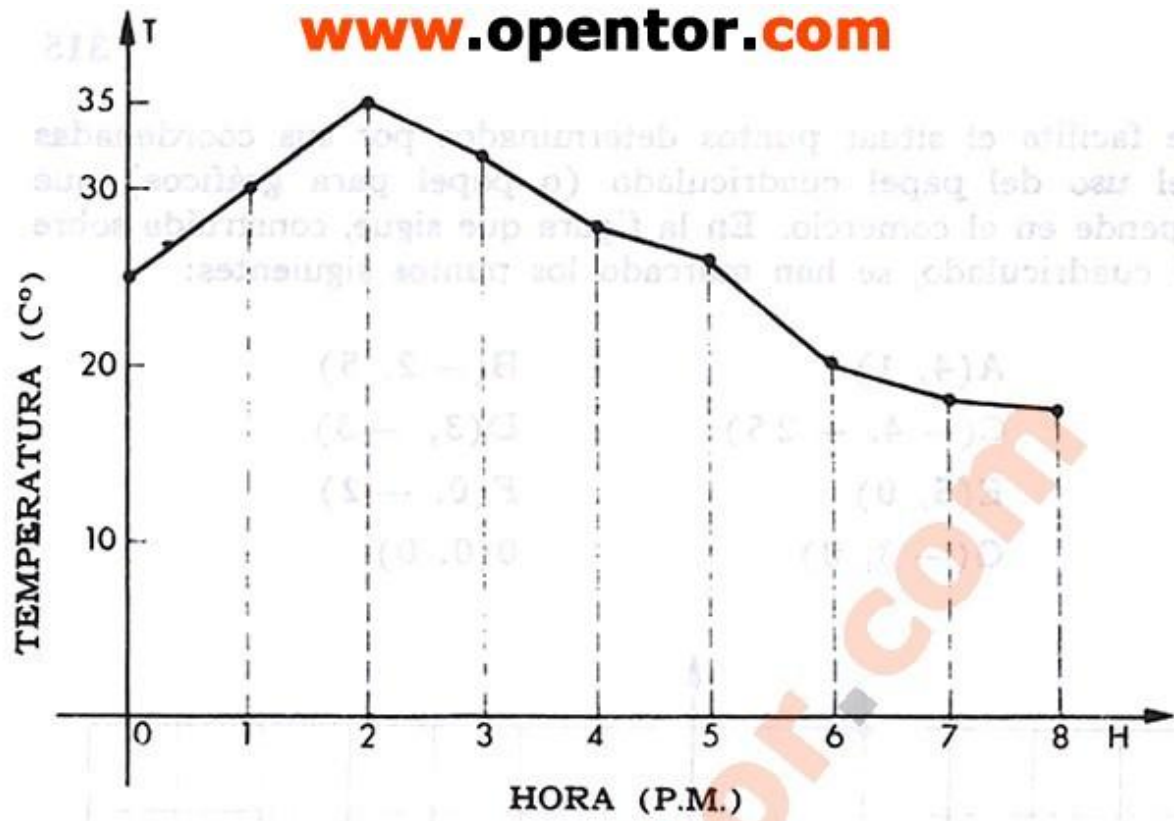
Según la manera usual de orientar los ejes, si el punto queda a la derecha del eje vertical su abscisa es positiva, si queda a la izquierda, su abscisa es negativa; si el punto está situado sobre el mismo eje vertical, su abscisa es cero. Si el punto queda por arriba del eje horizontal, su ordenada es positiva, si queda por debajo, su ordenada es negativa; si el punto se halla sobre el mismo eje horizontal, su ordenada es cero.

Así, por ejemplo, el punto $A(-3, 4)$ en la figura anterior tiene abscisa $x = -3$ y ordenada $y = 4$.

Se facilita el situar puntos determinados por sus coordenadas con el uso del papel cuadriculado (o papel para gráficos) que se expende en el comercio. En la figura que sigue, construida sobre papel cuadriculado, se han marcado los puntos siguientes:

 $A(4, 1)$ $B(-2, 5)$ $C(-4, -2,5)$ $D(3, -3)$ $E(5, 0)$ $F(0, -2)$ $G(-3, 0)$ $O(0, 0).$ 

Puesto que de este modo a cada par ordenado de números se le puede hacer corresponder un punto, podemos representar gráficamente por medio de puntos los pares de valores correspondientes que aparecen en las tablas 1 y 2 (véase pág. 312). De esta manera se obtiene una idea más clara de la relación o dependencia que existe entre las magnitudes consideradas en cada caso. Presentamos el gráfico correspondiente a la tabla 1 y en la figura siguiente el que corresponde a la tabla 2.



Conectando los puntos obtenidos por medio de líneas (cuando las magnitudes consideradas varían continuamente) se tiene una visualización más completa de la relación que existe entre ellas. Así, por ejemplo, en la fig. que corresponde a la tabla 2 se nota que todos los puntos obtenidos quedan en línea recta. Debido a esto se dice que la relación entre el tiempo y el espacio, definida por la fórmula $e = 5t$, es *lineal*. Más adelante veremos la forma más general de una relación lineal, es decir, de una relación cuyo gráfico es una línea recta.

EJERCICIO 94.

En una hoja de papel ordinario o cuadriculado dibujar dos ejes rectangulares y adoptando unidades convenientes marcar los siguientes puntos:

- | | | |
|---------------------------|----------------------|------------------|
| 1º) (3, 5) | 2º) (-4, 2) | 3º) (-5, -8) |
| 4º) (-3, 0) | 5º) (0, 2) | 6º) (4,5, -1) |
| 7º) (-4, 4) | 8º) (3, $\sqrt{2}$) | 9º) (-3, -3) |
| 10º) (0, 9) | 11º) (5, -5) | 12º) (2,5, -5,5) |
| 13º) ($\sqrt{3}$, -0,5) | 14º) (0, 0) | 15º) (6, 0) |
| 16º) (8, 8) | 17º) (-1,4, 3,2) | 18º) (-10, 0) |
| 19º) (7, 7) | 20º) (-4, -6) | 21º) (-3, 12) |
- 22º) Dibujar el triángulo cuyos vértices son (-3, -2), (1, 4) y (-5, 0) y comprobar gráficamente que es isósceles.
- 23º) Dibujar el triángulo cuyos vértices son (-1, 0), (4, 3) y (-7, 10) y comprobar que tiene un ángulo recto (utilícese el transportador).
- 24º) Dibujar el cuadrilátero cuyos vértices son (1, 3), (-2, 2), (0, 5) y (3, 6) y comprobar que es un paralelogramo.
- 25º) Comprobar que los puntos (5, 4), (9, 2), (8, 5) y (6, 1) forman un cuadrado.
- 26º) Comprobar que los puntos (3, 2), (-1, 0) y (6, 3,5) están en línea recta.
- 27º) Comprobar gráficamente que los puntos (5, -3), (4, -10), (-3, -9) y (-2, 2) están en una circunferencia cuyo centro es el punto (1, -6).

28º) La siguiente tabla da en toneladas el peso máximo w que soporta una columna de madera cuya sección es un cuadrado de 6 pulgadas de lado, para distintas longitudes l (en pies):

l	6	8	10	12	14	16	18	20
w	18	13	12	11	9,5	8,5	7	6

Construir un gráfico que muestre la relación entre l y w .

29º) En la ciudad de Marsella la temperatura promedio mensual en grados Farenheit fué:

Mes	Enº.	Febº.	Mar.	Ab.	May.	Jun.	Jul.	Agº.	Sepº.	Oct.	Novº.	Dic.
Temp.	21º	23º	33º	44º	54º	64º	71º	70º	63º	51º	37º	26º

Asignar un número de orden a cada mes (enero : 1 , febrero : 2 , marzo : 3 , etc.) y construir el gráfico de la temperatura media según los datos indicados.

30º) La Oficina de Estadísticas de Vida ha publicado la siguiente tabla de vida probable para hombres y mujeres en los Estados Unidos:

Edad	Vida probable	
	Hombres	Mujeres
0	65,5	71,0
20	49,0	53,8
40	30,7	35,0
45	26,5	30,5
50	22,4	26,2
55	18,8	22,0
60	15,4	18,1
65	12,4	14,4
70	9,8	11,2

Usando los mismos ejes de coordenadas, hágase un gráfico de la vida probable de los hombres, según su edad, y otro, de la vida probable de las mujeres.

109. Constantes y variables.

Los símbolos numéricos que intervienen en toda discusión o problema son de dos clases: constantes y variables.

Constantes son aquellos símbolos que conservan el mismo valor en toda la discusión o problema. Las constantes se pueden clasificar en *constantes propias* y en *constantes indeterminadas*. Las constantes propias, llamadas también absolutas, son los números y los símbolos literales que representan un valor numérico fijo.

Ejemplos: 4 , -3 , $\frac{2}{5}$, π .

Las constantes indeterminadas, llamadas también constantes arbitrarias o parámetros, son símbolos que representan valores numéricos aún no determinados o fijados en la cuestión que se considera. Ejemplo: los coeficientes a y b en la ecuación $ax + b = 0$.

Variables son aquéllos símbolos que representan cualquier número de una clase o conjunto determinado, de tal suerte que durante una misma discusión o problema pueden tomar cualquiera de los valores de dicho conjunto. Por ejemplo, si en la expresión $2n + 1$, n representa un número natural cualquiera, n es una variable.

En la fórmula $C = 2\pi r$ que expresa la longitud C de la circunferencia de radio r , 2 y π son constantes propias y r es variable. En esta fórmula r puede representar cualquier número real y positivo, es decir, cualquier número entero, fraccionario o irracional positivo. La longitud de la circunferencia C es también una variable.

110. Funciones.

Cuando dos variables están relacionadas de tal manera que a cada valor de una de ellas corresponde uno o más valores de la otra, se dice que la segunda variable *depende* o que es *función* de la primera.

La primera variable se llama variable *independiente*, y la segunda, variable *dependiente*.

Ejemplos.

1. En la fórmula $C = 2\pi r$, a cada valor del radio r corresponde un valor de C . La longitud de la circunferencia depende, pues, de su radio, es decir, es función del radio.

2. En la Tabla 1 (pág. 303) a cada hora H corresponde una temperatura determinada T . Por consiguiente, diremos que la temperatura en un lugar es función de la hora.

3. Si $y = x^3$ podemos considerar x como la variable independiente. A cada valor que se asigne a x , corresponde un valor bien determinado de y , que depende del valor asignado a x . Por ejemplo, si $x = 2$, $y = 8$; si $x = 3$, $y = 27$, etc. De esta manera puede construirse la siguiente tabla de valores correspondientes:

x	1	2	3	4	4,5	5
y	1	8	27	64	91.125	125

Cuando una variable es función de otra existe una correspondencia entre los valores que ellas toman. Recíprocamente, toda correspondencia entre dos series o conjuntos de valores sirve para definir una función.

4. En la ecuación $2x - 3y = 12$ que relaciona las variables x é y , se puede considerar x como la variable independiente y entonces el valor de y queda determinado tan pronto se fija el valor de x . Por ejemplo, si $x = 3$ resulta $y = -2$. O, viceversa, se puede considerar y como variable independiente y entonces el valor de x depende del que se asigne a y . Si, por ejemplo, se toma $y = 0$, resulta como valor correspondiente $x = 6$. Esta función se llama *inversa* de la considerada primeramente.

Despejando y en la ecuación $2x - 3y = 12$ tendríamos

$$y = \frac{2}{3}x - 4$$

que expresa, en forma explícita, y como función de x .

Por otra parte, despejando x se obtendría

$$x = \frac{3}{2}y + 6$$

que expresa a x en función de y .

El concepto de función es fundamental en álgebra y en muchas otras ramas de la matemática pura y aplicada.

Para indicar, en términos generales, que la variable y es función de la variable x , se escribe:

$$y = f(x)$$

y se lee: "y es igual a función f de x".

Si en una cuestión determinada $f(x)$ se usa para representar $3x + 5$, entonces la notación $f(2)$ se emplea para indicar el valor que toma la función cuando x se sustituye por 2. En este ejemplo tendríamos $f(2) = 3 \cdot 2 + 5 = 11$. Análogamente,

$$f(3) = 3 \cdot 3 + 5 = 14$$

$$f(-1) = 3(-1) + 5 = 2, \text{ etc.}$$

En otra cuestión se puede poner $f(x) = x^2$ ó $f(x) = 1/x$, de modo que $f(x)$ no representa en todos los casos la misma función de x . Por otra parte, no siempre se usa $f(x)$ para indicar en general una función. A veces se escribe $F(x)$, $h(x)$, $P(x)$, etc.

Una variable puede también depender o ser función de dos o más variables independientes. Por ejemplo, el volumen de un cilindro depende del radio de la base y de la altura del cilindro. En este caso se escribe

$$V = f(r, h) = \pi r^2 h.$$

Una función se puede definir por medio de una fórmula o ecuación que ligue las variables; o por medio de una tabla de valores correspondientes (como en el caso de las funciones físicas o empíricas); o gráficamente.

EJERCICIO 95.

1º) Expresar la distancia d (en kilómetros) que recorre un automóvil que viaja a 60 km por hora en función del tiempo t (en horas).

2º) Expresar el costo C (en pesos) de g galones de agua destilada. Si cada galón cuesta 32 centavos.

- 3º) Expresar el área A de un cuadrado en función de su lado l .
- 4º) Expresar el área A de un círculo en función de su radio r .
- 5º) Un taquígrafo escribe 120 palabras por minuto. Expresar la cantidad de palabras P que escribe en función del número h de minutos que trabaja.
- 6º) En una competición de tiro, cada participante hizo un solo centro, que valía 100 puntos. Como por las aproximaciones se contaban sólo 5 puntos, expresar la fórmula del puntaje P , en función del número n de aproximaciones por competidor.
- 7º) Expresar el perímetro P de un rectángulo en función de su base b y de su altura h .
- 8º) Expresar la altura h de un triángulo en función de su área A y de su base b .
- 9º) Expresar el interés simple que produce un capital de 100 000 \$ en función del tanto por ciento mensual r y del tiempo t en años.
- 10º) Expresar el perímetro P de un polígono regular en función del lado l y del número de lados n .
- 11º) Dado $f(x) = 4x - 1$, hallar:
a) $f(1)$, b) $f(-1)$, c) $f(0)$, d) $f(2)$.
- 12º) Dado $f(x) = 5 - x$, hallar:
a) $f(3)$, b) $f(-2)$, c) $f(1)$, d) $f(5)$.
- 13º) Dado $f(x) = x^2 + 1$, hallar:
a) $f(0)$, b) $f(1)$, c) $f(2)$, d) $f(a)$.
- 14º) Dado $f(x) = 6/x$, hallar:
a) $f(2)$, b) $f(3)$, c) $f(-6)$, d) $f(a)$.
- 15º) Dado $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, hallar:
a) $f(3)$, b) $f(0)$, c) $f(1)$, d) $f(0,5)$.
- 16º) Dada la ecuación $2x + y = 8$ expresar:
a) y en función de x ; b) x en función de y .
- 17º) Dada la ecuación $4x - 2y = 9$ expresar:
a) y en función de x ; b) x en función de y .
- 18º) Dada la ecuación $PV = k$, expresar:
a) V en función de P ; b) P en función de V .
- 19º) Dada la fórmula $e = 10 + 5t$, expresar t en función de e .
- 20º) Dada la fórmula $S = 2\pi rh$, expresar h en función de S y de r .

111. Algunas funciones sencillas y sus gráficos.

El método estudiado en § 108 para representar pares de valores correspondientes mediante puntos del plano referidos a un sistema de ejes rectangulares, puede aplicarse a cualquier función $y = f(x)$. A cada par de valores correspondientes (x, y) basta asignarle el punto P cuya abscisa es x y cuya ordenada es y . El conjunto de los puntos así obtenidos constituye el *gráfico de la función* $y = f(x)$.

Para ilustrar esto estudiaremos algunas funciones sencillas, pero importantes, y sus gráficos correspondientes.

Ejemplos.

1. $y = kx$ (k constante $\neq 0$).

La función definida por esta ecuación se llama *proporcionalidad directa*. Cuando y es el producto de x por una constante se dice que y es *proporcional* a x , o mejor, que y es *directamente proporcional* a x . La constante k se llama *coeficiente de proporcionalidad*. Cuando no se conoce el valor numérico de k se puede determinar mediante un par (x, y) de valores correspondientes. En particular, para $x = 1$ resulta $y = k$, esto es: k es el valor que toma la función para $x = 1$.

Ejemplo. Se sabe que la fuerza F que hay que aplicar a un muelle para estirarlo es proporcional al desplazamiento x de la extremidad del muelle. Si se necesita una fuerza de 20 lb para estirar el muelle $\frac{1}{2}$ pulgada, expresar F en función de x .

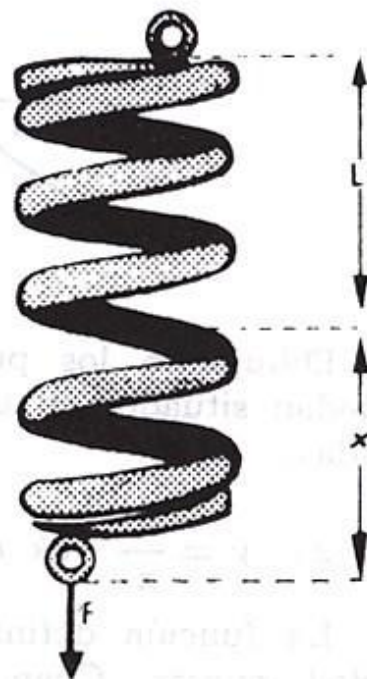
Puesto que F es proporcional a x se tiene:

$$[1] \quad F = kx$$

Se sabe que para $x = \frac{1}{2}$, $F = 20$,

luego

$$20 = k \cdot \frac{1}{2} \quad \text{de donde} \quad k = 40.$$



Por tanto, introduciendo en [1] el valor hallado de k , resulta

$$F = 40x.$$

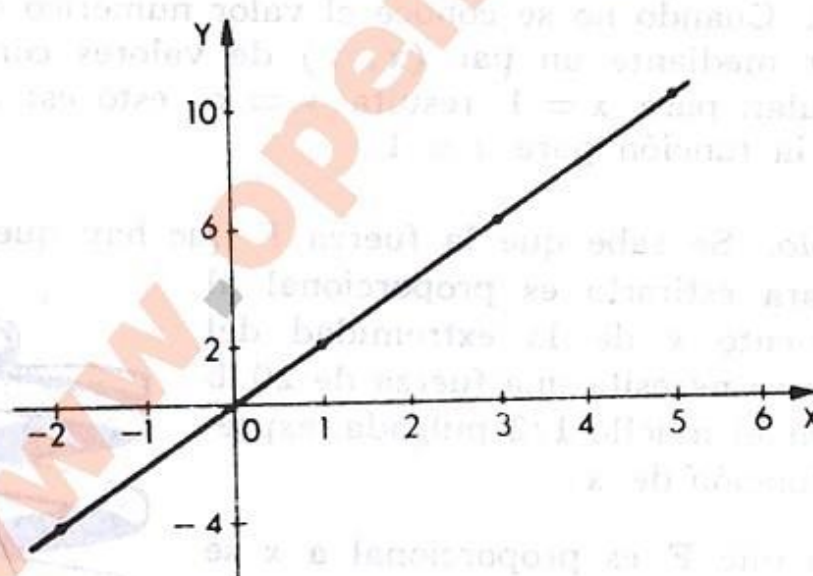
El valor de la constante de proporcionalidad depende de las unidades de medida utilizadas para determinar su valor. Si en el ejemplo anterior la fuerza se midiese en kilogramos y la distancia en centímetros, resultaría un valor distinto para la constante de proporcionalidad.

Para construir el gráfico de $y = kx$ consideremos el caso especial

$$y = 2x$$

y formemos la siguiente tabla de valores correspondientes:

x	-2	0	1	3	5
y	-4	0	2	6	10



Dibujando los puntos representativos se observa que todos quedan situados en una recta que pasa por el origen de coordenadas.

$$2. \quad y = \frac{k}{x} \quad (k \text{ constante} \neq 0).$$

La función definida por esta fórmula se llama *proporcionalidad inversa*. Cuando y es el cociente de una constante por x

se dice que y es *inversamente proporcional* a x . La constante k se llama *coeficiente de proporcionalidad (inversa)*, y cuando no es conocida, puede determinarse, como en el caso anterior, mediante un par (x, y) de valores correspondientes. Por ejemplo, si para $x = 2$ es $y = 5$, entonces $k = xy = 10$, y resulta $y = 10/x$.

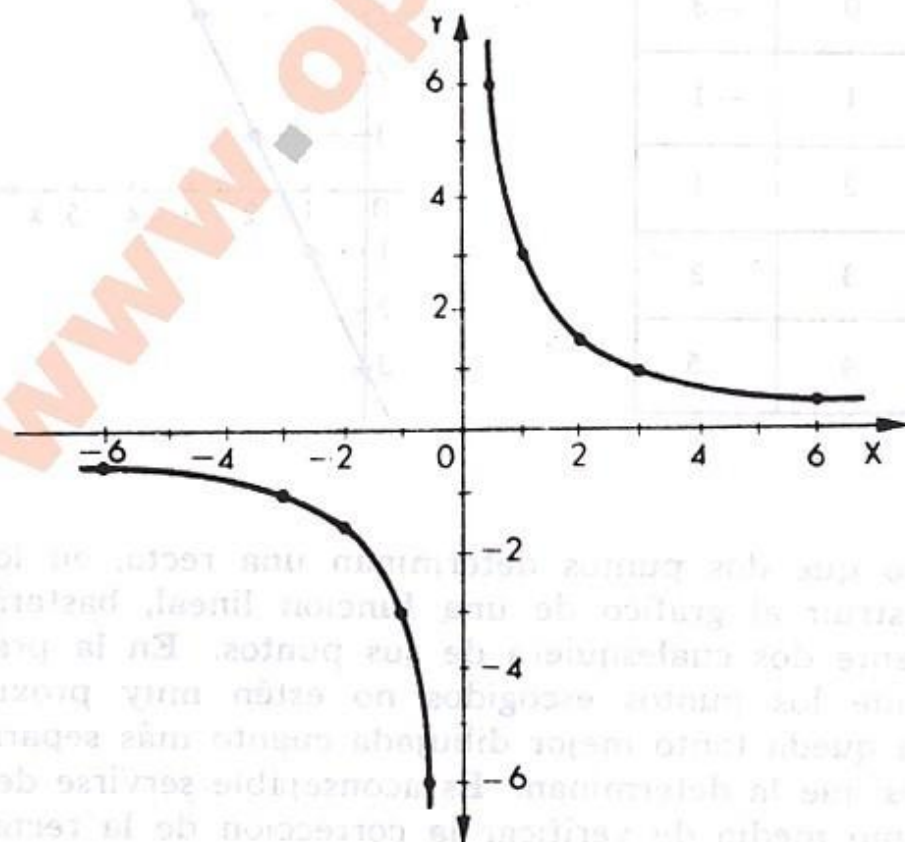
Para construir el gráfico de $y = k/x$ consideremos el caso especial

$$y = \frac{3}{x}$$

y comencemos por construir la siguiente tabla de valores correspondientes:

x	-6	-3	-2	-1	-0,5	0,5	1	2	3	6
y	-0,5	-1	-1,5	-3	-6	+6	3	1,5	1	0,5

Se nota que a medida que aumenta el valor absoluto de x el valor absoluto de y disminuye. Y, viceversa, cuando el valor



de x se toma cada vez más próximo a cero la y aumenta (en valor absoluto). La función no está definida para $x = 0$.

Uniendo los puntos representativos se obtiene una curva que se compone de dos ramas. Esta curva se llama *hipérbola*.

3. $y = ax + b$ (a y b constantes).

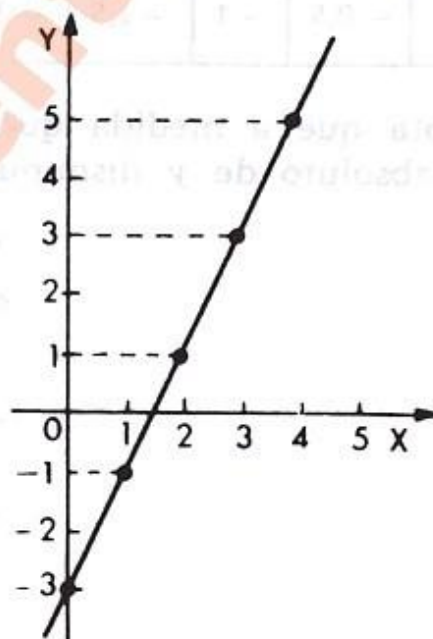
Esta función se llama *lineal*. Se caracteriza por ser una expresión de primer grado en x é y . La denominación de *lineal* tiene su origen en la representación geométrica: $y = ax + b$ es la función más general que tiene por gráfico una línea recta.

Para verlo, consideremos, por ejemplo, el caso de la función

$$y = 2x - 3.$$

He aquí una tabla de valores y el gráfico correspondiente:

x	y
0	-3
1	-1
2	1
3	3
4	5



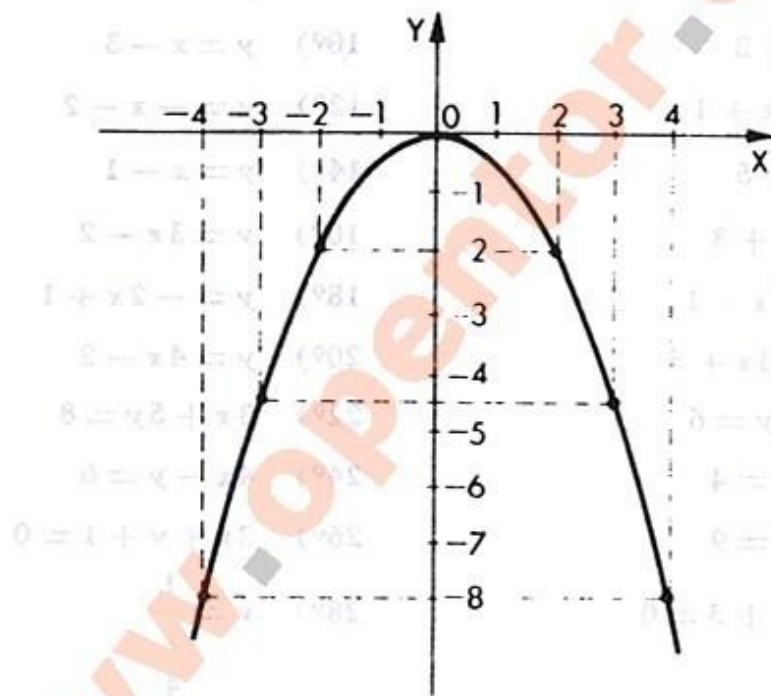
Puesto que dos puntos determinan una recta, en lo sucesivo, para construir el gráfico de una función lineal, bastará localizar gráficamente dos cualesquiera de sus puntos. En la práctica conviene que los puntos escogidos no estén muy próximos, pues una recta queda tanto mejor dibujada cuanto más separados estén los puntos que la determinan. Es aconsejable servirse de un tercer punto como medio de verificar la corrección de la recta obtenida.

4. $y = kx^2$.

Cuando y depende de x de este modo, se dice que y es *proporcional al cuadrado de x* . Por ejemplo, en la caída libre de los cuerpos en el vacío se tiene

$$e = \frac{1}{2} g t^2,$$

es decir, el espacio e recorrido es proporcional al **cuadrado** del tiempo t que dura la caída; $1/2 g$ tiene un valor constante en cada lugar de la tierra y vale aproximadamente 4,9 cuando el tiempo se mide en segundos y el espacio recorrido en metros.



Para construir el gráfico de $y = kx^2$ consideremos el caso especial $k = -0,5$; esto es, la función

$$y = -0,5x^2.$$

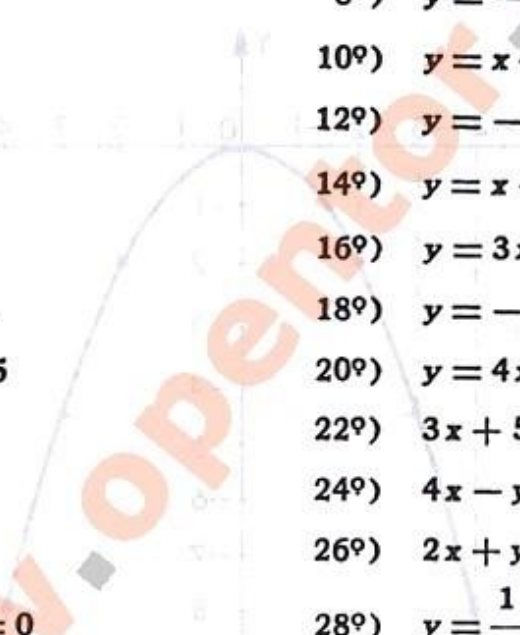
Dando algunos valores a x y calculando los valores correspondientes de y se obtiene la siguiente tabla:

x	-4	-3	-2	0	2	3	4
y	-8	-4,5	-2	0	-2	-4,5	-8

Con esta tabla se construye el gráfico que muestra la figura. Uniendo los puntos obtenidos por medio de un trazo continuo resulta una curva que se llama *parábola*.

EJERCICIO 96.

Construir el gráfico de cada una de las funciones definidas por las ecuaciones siguientes:

- 
- 1º) $y = x$ 2º) $y = -x$
- 3º) $y = 0,5x$ 4º) $y = 3x$
- 5º) $y = -2x$ 6º) $y = \frac{1}{4}x$
- 7º) $y = 10x$ 8º) $y = -6x$
- 9º) $y = x + 2$ 10º) $y = x - 3$
- 11º) $y = -x + 1$ 12º) $y = -x - 2$
- 13º) $y = x + 5$ 14º) $y = x - 1$
- 15º) $y = 2x + 3$ 16º) $y = 3x - 2$
- 17º) $y = 0,5x - 1$ 18º) $y = -2x + 1$
- 19º) $y = -3x + 5$ 20º) $y = 4x - 2$
- 21º) $2x + 3y = 6$ 22º) $3x + 5y = 8$
- 23º) $x - 2y = 4$ 24º) $4x - y = 6$
- 25º) $3x + y = 9$ 26º) $2x + y + 1 = 0$
- 27º) $x - 4y + 3 = 0$ 28º) $y = \frac{1}{x}$
- 29º) $y = \frac{2}{x}$ 30º) $y = \frac{4}{x}$
- 31º) $y = \frac{-1}{x}$ 32º) $y = \frac{-2}{x}$
- 33º) $y = \frac{10}{x}$ 34º) $y = \frac{6}{x}$
- 35º) $y = \frac{-3}{x}$ 36º) $y = x^2$
- 37º) $y = 2x^2$ 38º) $y = -x^2$
- 39º) $y = -\frac{1}{4}x^2$ 40º) $x = 3y^2$

41º) Si y es directamente proporcional a x , y se tiene $y = 10$ para $x = 2$, expresar y como función de x . Hallar el valor de y cuando $x = 3$.

42º) Si y es directamente proporcional a x , y se sabe que $y = 2$ cuando $x = 4$, expresar y como función de x , y hallar el valor de y para $x = 6$.

43º) Si y es directamente proporcional a x , y para $x = 3$ es $y = 12$, expresar y como función de x , y hallar el valor de y para $x = 5$.

44º) En el movimiento uniforme el espacio recorrido e es directamente proporcional al tiempo t empleado en recorrerlo. En este caso al coeficiente de proporcionalidad se le llama *velocidad*. Si para $t = 2$ s se tiene $e = 20$ m, expresar e como función de t y hallar e para $t = 10$ s.

45º) La fuerza F necesaria para estirar un resorte fijo por un extremo es directamente proporcional al desplazamiento x del extremo libre del resorte. Si para $x = 1$ cm se requiere $F = 8$ lb, hallar F , en función de x y determinar el valor de F para $x = 2$ cm.

46º) Si y es inversamente proporcional a x , y se sabe que $y = 2$ para $x = 3$, expresar y como función de x y hallar el valor de y para $x = 4$.

47º) Si y es inversamente proporcional a x , y para $x = 2$ es $y = -4$, expresar y como función de x , y hallar el valor de y para $x = 16$.

48º) Según la ley de Boyle, el volumen v que ocupa un gas a temperatura constante es inversamente proporcional a la presión p a que se halla sometido. Si $v = 100$ cm³ cuando $p = 20$ kg por cm², expresar v como función de p y hallar el valor de v cuando $p = 20$ kg por cm².

49º) El número N de vibraciones por segundo de una cuerda a tensión constante, es inversamente proporcional a la longitud l de la cuerda. Si una cuerda de 50 pulgadas de largo vibra 200 veces por segundo, expresar N en función de l y hallar el número de vibraciones por segundo de una cuerda análoga de 40 pulgadas de largo.

50º) Si y es proporcional al cuadrado de x , y sucede que para $x = 5$ es $y = 50$, expresar y como función de x , y determinar el valor de y para $x = 3$.

51º) Si y es proporcional al cuadrado de x , y se tiene que $y = 0,8$ para $x = 2$, expresar y como función de x , y averiguar qué valor toma y para $x = 10$.

52º) El área S de un cubo (hexaedro regular) es proporcional al cuadrado de la arista x del cubo. Si para $x = 2$ cm es $S = 24$ cm², expresar S como función de x y calcular S para $x = 3$ cm.

53º) Cuando una bola rueda por un plano inclinado, la distancia d que recorre la bola en el tiempo t es proporcional al cuadrado del tiempo. Si para $t = 1,5$ s es $d = 18$ pies, expresar d en función del tiempo y hallar la distancia recorrida en 2 segundos.

54º) Cuando $y = k/x^2$ se dice que y es inversamente proporcional al cuadrado de x . Si para $x = 2$ es $y = 0,3$, determinar k y hallar el valor de y para $x = 4$.

55º) Si y es inversamente proporcional al cuadrado de x y se tiene que $y = 0,1$ para $x = 10$, expresar y en función de x . ¿Cuánto vale y cuando $x = 5$?

56º) La fuerza F con que se atraen dos imanes es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d entre ellos. Si para $d = 4$ cm es $F = 0,4$ g, expresar F en función de d y hallar la fuerza con que se atraen cuando $d = 3$ cm.

57º) La resistencia eléctrica R de un alambre es inversamente proporcional al cuadrado de su diámetro D . Un alambre de 0,5 cm de diámetro tiene una resistencia de 3,2 ohmios. ¿Cuál sería su resistencia si su diámetro se redujese a 0,4 cm?

58º) Si y es directamente proporcional a x , y para $x = a$ es $y = b$, y para $x = c$ es $y = d$, demostrar que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

59º) Si y es inversamente proporcional a x , y para $x = a$ es $y = b$, y para $x = c$ es $y = d$, demostrar que

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}.$$

60º) Si z es inversamente proporcional a y , e y es inversamente proporcional a x , ¿cómo depende z de x ?

112. Variación conjunta. Estudio de la proporcionalidad entre los elementos de una fórmula.

En las aplicaciones se encuentra con frecuencia una variable que es función de dos o más variables independientes. En los casos más sencillos esta función es de una de las formas siguientes:

1. $u = kxy.$

En este caso u es proporcional al producto xy . Se dice también que u es directamente proporcional a x y a y . Esto realmente quiere decir: u es directamente proporcional a x , si y permanece constante; y u es directamente proporcional a y , si x permanece constante.

2. $u = k \frac{x}{y}.$

Aquí u es proporcional al cociente x/y . Para un valor fijo de y , u resulta directamente proporcional a x . Para un valor fijo de x , u es inversamente proporcional a y .

$$3. \quad u = kxy^2.$$

Aquí u es proporcional al producto xy^2 . Para un valor fijo de y , u es directamente proporcional a x ; para un valor fijo de x , u es directamente proporcional al cuadrado de y .

$$4. \quad u = k \frac{xy}{z}.$$

En este caso u es proporcional al cociente xy/z . Para y y z fijos, u es directamente proporcional a x ; análogamente, para x y z fijos, u es directamente proporcional a y . Para x e y fijos, u es inversamente proporcional a z .

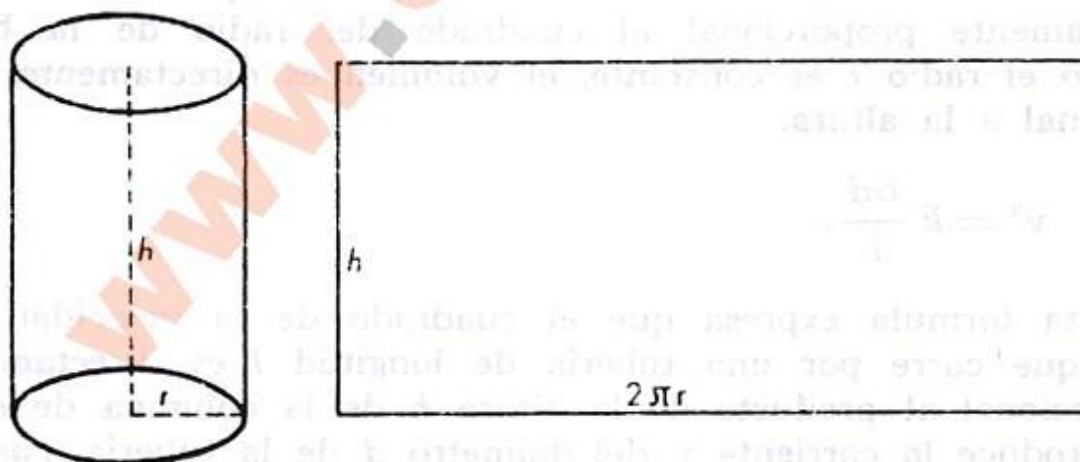
$$5. \quad u = k \frac{xy}{z^2}.$$

Este caso es análogo al anterior, con la variante de que para x e y fijos u es inversamente proporcional al cuadrado de z .

Ejemplos.

$$1. \quad S = 2\pi rh.$$

Esta fórmula expresa el área lateral de un cilindro cuya base es un círculo de radio r y cuya altura es h . Dicha área



es proporcional al producto rh , siendo 2π el coeficiente de proporcionalidad. Cuando el radio de la base es constante, el área es directamente proporcional a la altura; cuando la altura es constante, el área es directamente proporcional al radio de la base.

$$2. \quad I = k \frac{E}{R}.$$

Esta fórmula expresa la intensidad I de la corriente eléctrica, en un circuito con corriente continua, en función de la fuerza electromotriz E y de la resistencia R del circuito (ley de Ohm). Cuando E se mide en voltios, R en ohmios e I en amperios, el coeficiente de proporcionalidad k vale 1. La fórmula nos dice que para R constante, I es directamente proporcional a E y que, para E constante, I es inversamente proporcional a la resistencia R .

Generalmente se expresa la ley de Ohm diciendo que la intensidad de la corriente es directamente proporcional a la fuerza electromotriz e inversamente proporcional a la resistencia, pero debe sobrentenderse que la proporcionalidad (directa o inversa) existe con respecto a una variable (E ó R) cuando se supone constante la otra. Por ejemplo, si E y R se duplicasen a la vez, I no sufriría cambio alguno.

$$3 \quad V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

La fórmula anterior expresa el volumen de un cono en función del radio r de la base y de la altura h del cono. El volumen es proporcional al producto $r^2 h$, siendo $1/3 \pi$ el coeficiente de proporcionalidad. Cuando la altura es constante, el volumen es directamente proporcional al cuadrado del radio de la base; cuando el radio r es constante, el volumen es directamente proporcional a la altura.

$$4. \quad v^2 = k \frac{hd}{l}.$$

Esta fórmula expresa que el cuadrado de la velocidad del agua que corre por una tubería de longitud l es directamente proporcional al producto de la altura h de la columna de agua que produce la corriente y del diámetro d de la tubería, cuando l es constante; y si h y d son constantes, entonces expresa que v^2 es inversamente proporcional a la longitud l de la tubería.

$$5. \quad F = k \frac{mm'}{r^2}.$$

La fórmula anterior sintetiza la famosa ley de Newton o de

la gravitación universal. Expresa que la fuerza F con que se atraen dos cuerpos de masas m y m' es directamente proporcional al producto de dichas masas, para una distancia r fija; y que para masas constantes, F es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r .

Nótese que cuando la expresión algebraica de una fórmula es una fracción, existe proporcionalidad directa con respecto a cada uno de los factores del numerador, suponiendo constantes los demás elementos que intervienen en la fórmula; y que existe proporcionalidad inversa con respecto a cada uno de los factores del denominador, suponiendo también constantes todos los demás elementos.

Por ejemplo, si

$$E = k \frac{Ns}{tr},$$

E será directamente proporcional a s , suponiendo N , t y r constantes, ya que se puede escribir

$$E = \frac{kN}{tr} s = k's,$$

habiendo puesto $k' = kN/tr$. Análogamente, E es, v. gr., inversamente proporcional a r , suponiendo fijos los valores de las otras letras, pues se tiene

$$E = \frac{kNs}{t} \cdot \frac{1}{r} = \frac{k''}{r},$$

en donde ahora es $k'' = kNs/t$.

Si, en vez de factores en el numerador o denominador, aparecen en la fórmula sumandos, no hay entonces proporcionalidad con respecto a cada uno de los términos de la suma; la función es ahora de un tipo más complicado. Por ejemplo, si

$$u = \frac{kv}{v + v'}$$

u no es ni directa ni inversamente proporcional a v cuando v' es constante. Tampoco es u inversamente proporcional a v' cuando v es constante. Lo único que podríamos decir en este

caso es que si $v + v'$ se mantiene constante, entonces u es proporcional a v ; y que si v se mantiene constante, entonces u es inversamente proporcional a la suma $v + v'$.

EJERCICIO 97.

Escribir una fórmula que exprese la relación funcional que se indica en cada uno de los enunciados siguientes. Para evitar repeticiones sobrentenderemos que al hablar de proporcionalidad con respecto a una variable las otras siempre quedan fijas. Úsese en el resultado k como constante de proporcionalidad, excepto en los problemas en que se pide determinar su valor.

- 1º) F es directamente proporcional a L y a r .
- 2º) R es directamente proporcional a M e inversamente proporcional a S .
- 3º) V es directamente proporcional a r^2 y también directamente proporcional a h . Si para $r = 1$, $h = 2$ es $V = 2\pi$, determinar k .
- 4º) V es directamente proporcional a x , a y , y a z . Determinar k sabiendo que $V = 6$ para $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.
- 5º) f es directamente proporcional a p y a q e inversamente proporcional a r .
- 6º) f es directamente proporcional a p y a q e inversamente proporcional al cuadrado de r .
- 7º) u es directamente proporcional a x y al cubo de y .
- 8º) R es directamente proporcional al cuadrado de u e inversamente proporcional a v .
- 9º) R es directamente proporcional a la raíz cuadrada de x e inversamente proporcional al producto yz .
- 10º) H es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional al cubo de r .
- 11º) La potencia resolutive r de una lente* es directamente proporcional a la longitud de onda L de la luz e inversamente proporcional al diámetro d de la lente.
- 12º) La resistencia R de un hilo eléctrico a temperatura constante es directamente proporcional a su longitud l e inversamente proporcional al cuadrado de su diámetro d .
- 13º) La fuerza F del viento sobre la vela de un barco, en ángulo recto con la dirección del viento, es directamente proporcional al área A de la superficie de la vela y al cuadrado de la velocidad v del viento.

* Para escribir la fórmula correspondiente no es necesario que los alumnos entiendan la terminología física utilizada. Estos ejemplos se ponen para que pueda apreciarse la utilidad del Álgebra en Física y porque, sin duda, contribuyen a despertar el interés por el estudio de cursos posteriores.

14º) El volumen v de un gas es directamente proporcional a su temperatura absoluta T (temperatura centígrada $+ 273^\circ$) e inversamente proporcional a la presión p a que se halla sometido.

15º) La presión p de un gas a volumen constante es proporcional a su densidad D y a su temperatura absoluta T .

16º) La potencia H que un eje puede transmitir es directamente proporcional a la velocidad v de rotación del eje y al cubo de su diámetro d ,

17º) La presión total P del agua sobre el fondo de un tanque es directamente proporcional al área A del fondo y a la profundidad h del agua. Cuando el fondo tiene 1 pie cuadrado y la profundidad es de 1 pie, la presión es de 62,4 libras. Hallar la presión sobre el fondo de un tanque lleno de agua que tiene 10 pies² de fondo y 6 pies de altura.

18º) La cantidad de iluminación I que se recibe de una luz es directamente proporcional al número de bujías c e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d entre la luz y la superficie iluminada.

19º) La fuerza F que se necesita para mantener el movimiento circular de un objeto es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad y e inversamente proporcional al radio r de la trayectoria. Si la fuerza es 81 cuando $v=6$ y $r=4$, hallar la fuerza cuando $v=10$ y $r=3$.

20º) El peso máximo P que puede soportar una viga suspendida por ambos extremos es directamente proporcional a su anchura a y al cuadrado de su altura b , e inversamente proporcional a la distancia L entre los puntos de apoyo.

Estudiar la proporcionalidad en las siguientes fórmulas expresando en lenguaje ordinario el tipo de variación correspondiente:

$$21^\circ) i = \frac{crt}{100}$$

$$22^\circ) p = \frac{kT}{v}$$

$$23^\circ) S = \pi r g$$

$$24^\circ) H = k \frac{v}{T}$$

$$25^\circ) A = \pi a b$$

$$26^\circ) V = k \frac{wT}{p}$$

$$27^\circ) V = \frac{1}{3} B h$$

$$28^\circ) A = 2\pi r(h + r)$$

$$29^\circ) x = \frac{kv^2}{t}$$

$$30^\circ) a = \frac{kA}{r^3}$$

$$31^\circ) S = \pi(R + r)g$$

$$32^\circ) P = kv^3A$$

$$33^\circ) E = k \frac{N\theta}{t^2}$$

$$34^\circ) D = \frac{kL^4}{bd^3}$$

35º) $P = kRI^2$

36º) $T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$

37º) $P = k\sqrt{xy}$

38º) $Q = k \frac{abl^3}{c}$

39º) $V = \frac{uvw}{u+v+w}$

40º) $D = -\frac{wl^4}{8EI}$

113. Gráficos estadísticos.

En las páginas de periódicos, revistas y libros, en exposiciones y quizás en programas de televisión, el alumno habrá visto muchos gráficos como los que se presentan en las páginas que siguen. Estos gráficos son generalmente fáciles de comprender e interpretar, y representan ciertos hechos o datos en una forma más vívida y concisa que la que podría ofrecer una tabla o cuadro de números. Es interesante saber construir estos gráficos, pues constituyen un medio de expresión útil con el cual podemos transmitir, en forma clara y suficientemente precisa, ideas, datos e informaciones a grandes núcleos de personas. Por otra parte, estudiando cómo estos gráficos se construyen se aprende a interpretarlos cabalmente.

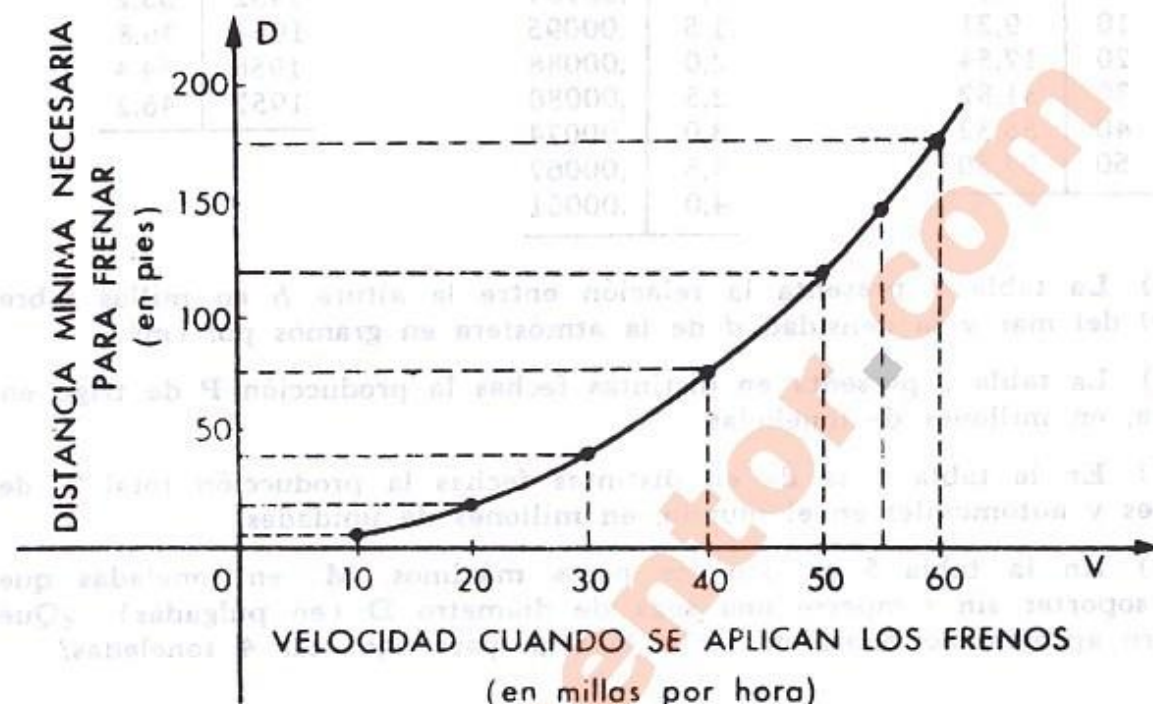
113-1. Gráficos de líneas.

Ya hemos dado algunos ejemplos de este tipo de gráfico al comienzo del presente capítulo (véanse las figs. de pág. 316). Se construyen utilizando un sistema de coordenadas para representar por puntos los datos de que se disponga, conectando después estos puntos por medio de una línea curva o poligonal. A veces estos gráficos se construyen mecánicamente mediante aparatos especiales (termógrafos, barógrafos, etc.).

Ejemplo. La siguiente tabla da la distancia mínima D (en pies) que recorre un automóvil que se mueve a una velocidad V (en millas por hora), después que se aplican los frenos en carretera seca, horizontal y con pavimento de concreto.

V	10	20	30	40	50	60
D	5	19	43	77	120	172

En la figura se presenta el gráfico correspondiente. Este gráfico muestra inmediatamente que D no es proporcional a V , ni es tampoco una función lineal de V (véase § 111, ej. 3). El gráfico nos permite también saber aproximadamente la distancia que recorrerá el automóvil después de aplicados los frenos, cuando



Distancias mínimas para detener un automóvil cuando se aplican los frenos.

marcha a una velocidad intermedia, por ejemplo, 55 millas por hora. Basta para ello medir la longitud de la ordenada correspondiente (en la figura se ha marcado con línea de puntos). Así se encuentra $D = 145$ pies para $V = 55$ millas por hora. Este proceso se llama *interpolación*.

EJERCICIO 98.

Para cada uno de los siguientes ejemplos escoger escalas convenientes y representar los datos que se proporcionan en las respectivas tablas. Unir los puntos obtenidos mediante una curva continua o poligonal de trazos (según que las magnitudes representadas sean continuas o discontinuas). Utilícese el eje horizontal para representar los datos que se dan en la primera columna de cada tabla. Cada eje debe tener un letrero explicativo y el gráfico debe llevar un título apropiado.

1º) La tabla 1 da la presión P , en milímetros de mercurio, del vapor de agua saturado a varias temperaturas t en grados centígrados. ¿Cuál será aproximadamente la presión a 15°C ?

TABLA 1

t	P
-20	0,78
-10	1,95
0	4,58
10	9,21
20	17,54
30	31,82
40	55,32
50	92,50

TABLA 2

h	d
0,0	,00122
0,5	,00112
1,0	,00104
1,5	,00095
2,0	,00088
2,5	,00080
3,0	,00074
3,5	,00067
4,0	,00061

TABLA 3

F	P
1948	53,6
1950	48,4
1952	65,2
1954	46,8
1956	54,4
1957	46,2

2º) La tabla 2 presenta la relación entre la altura h en millas sobre el nivel del mar y la densidad d de la atmósfera en gramos por cm^3 .

3º) La tabla 3 presenta en distintas fechas la producción P de trigo en América, en millones de toneladas.

4º) En la tabla 4 se da en distintas fechas la producción total T de camiones y automóviles en el mundo, en millones de unidades.

5º) En la tabla 5 se dan los pesos máximos, M, en toneladas que puede soportar sin romperse una soga de diámetro D (en pulgadas). ¿Qué diámetro aproximado habrá de tener la soga para aguantar 4 toneladas?

TABLA 4

F	T
1938	6,63
1948	10,48
1950	9,35
1951	9,35
1952	8,22
1953	10,39
1954	10,21
1955	13,58
1956	11,54
1957	12,35

TABLA 5

D	M
0,25	0,21
0,50	1,03
0,75	2,10
1,00	3,60
1,25	5,25
1,50	7,50
1,75	10,25
2,00	13,50

113-2. Gráficos de barras.

Los gráficos de barras vienen siendo una modificación de los gráficos de coordenadas en los cuales se marcan claramente las longitudes de las ordenadas (o de las abscisas) mediante barras gruesas o rectángulos de igual anchura y longitud proporcional a la magnitud que se desea representar. Las barras pueden disponerse horizontal o verticalmente, según convenga. Los gráficos

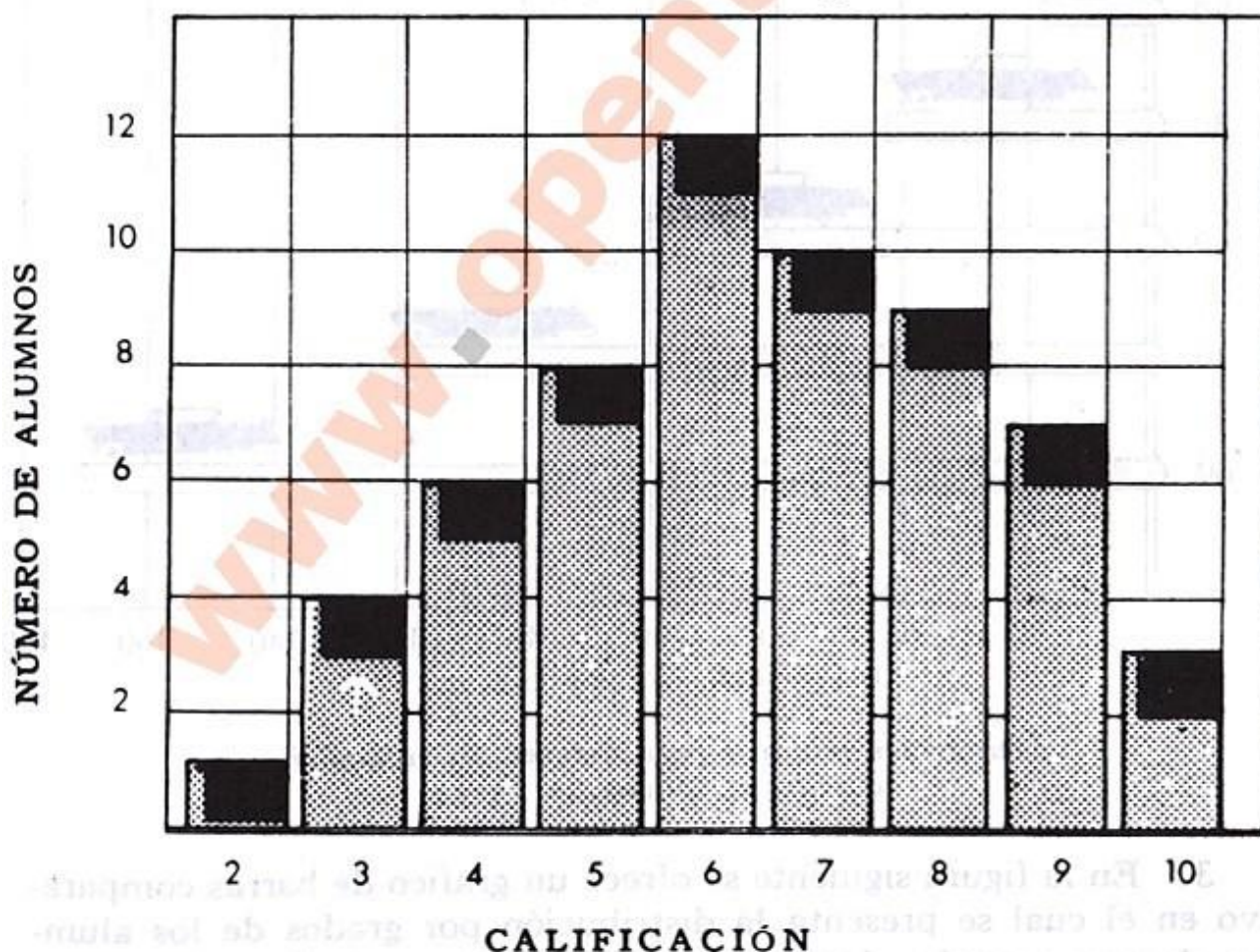
de barras son especialmente útiles cuando se desea comparar dos o más series de cantidades que dependen de una misma variable, para lo cual se usan rectángulos coloreados de distinto modo (por ejemplo, en blanco y negro).

Ejemplos.

1. La tabla siguiente presenta el resultado de un examen de Matemática en un grupo de 60 alumnos. El examen se componía de 10 problemas. En la primera línea del cuadro se indica el número de respuestas correctas obtenidas (o calificación sobre 10), y en la segunda línea el número de los alumnos que obtuvieron una calificación determinada. Así, por ejemplo, hubo 10 alumnos que resolvieron bien 7 problemas cada uno.

Calificación	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de alumnos	1	4	6	8	12	10	9	7	3

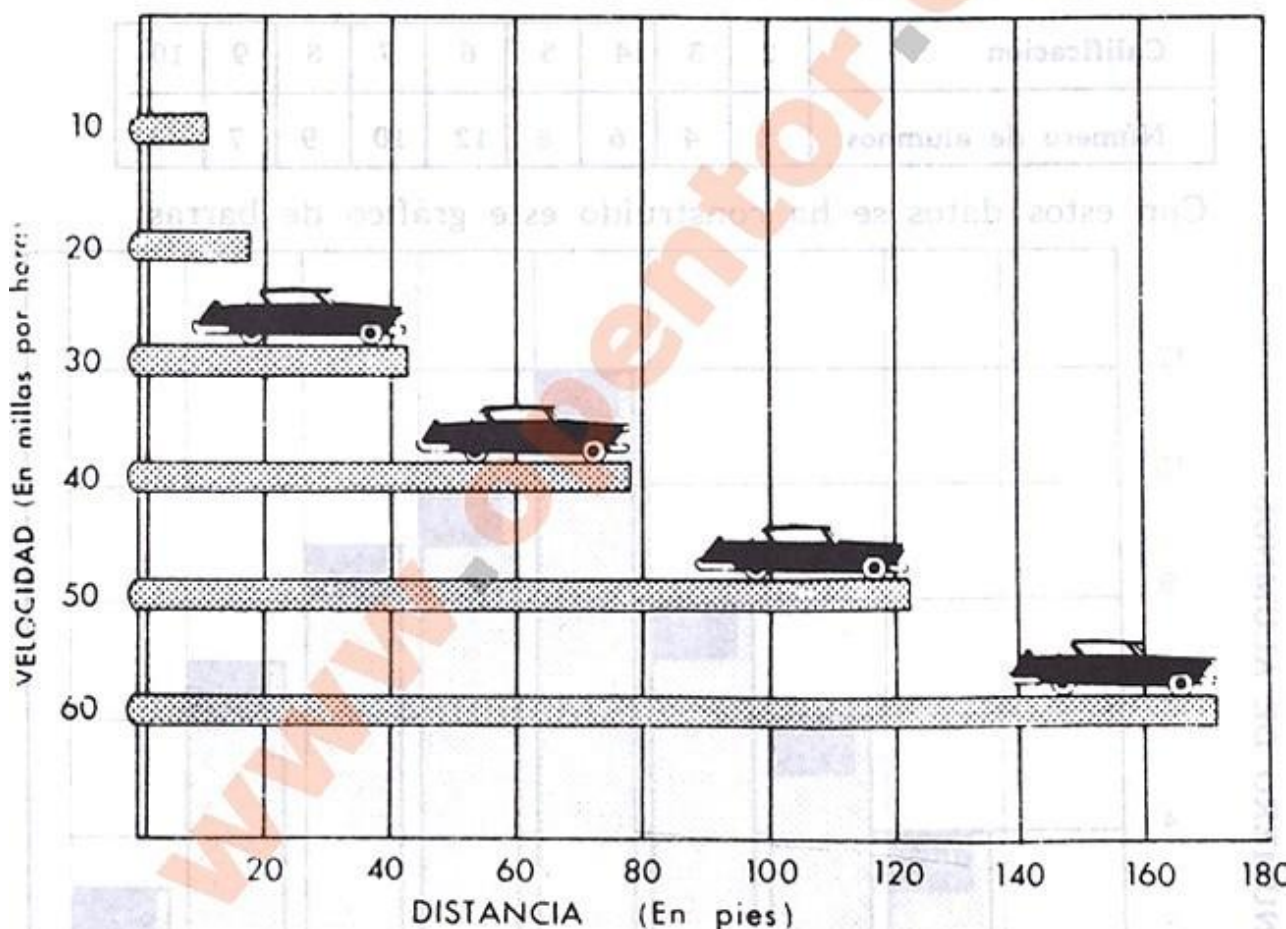
Con estos datos se ha construido este gráfico de barras:



Distribución de los alumnos de un grupo escolar según las calificaciones obtenidas en un examen.

El gráfico muestra claramente que hubo pocos alumnos que obtuvieron calificación muy baja o muy alta. La calificación promedio de la clase es 6,4. Se ve que los grupos más numerosos están en las clases 6 y 7, es decir, son de clase promedio. Este tipo de "distribución" se encuentra en muchos gráficos estadísticos.

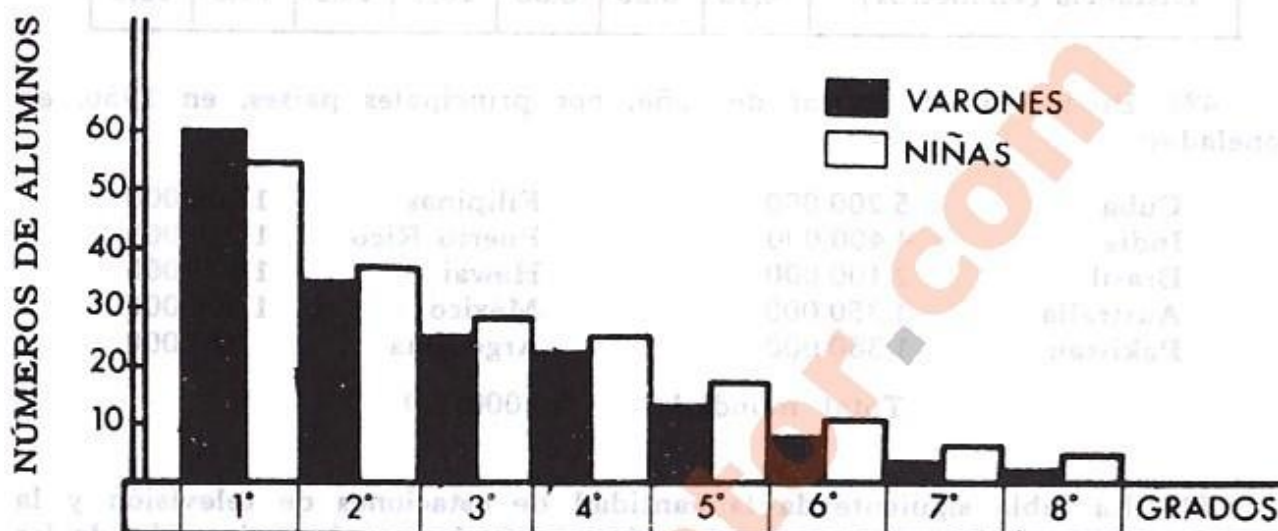
2. La figura siguiente presenta en forma de gráfico de barras horizontal los datos de la tabla de la pág. 336 referentes a la distancia que recorre un automóvil después que se le aplican los frenos. Se nota que en esta forma el gráfico resulta más expresivo dada la naturaleza del asunto que trata de representarse. Contribuye a hacerlo más vívido la silueta de un automóvil que se ha agregado al final de cada barra.



Distancias mínimas para detener un automóvil cuando se aplican los frenos.

3. En la figura siguiente se ofrece un gráfico de barras comparativo en el cual se presenta la distribución por grados de los alumnos de una escuela. Dentro de cada grado se indica el número de niños por medio de una barra en negro y el número de niñas

por medio de una barra en blanco. Se observa que el número de alumnos disminuye rápidamente en los grados sucesivos y que el número de niños, que en el primer grado supera al de niñas, en los grados posteriores es menor que el número de niñas, siendo la diferencia más notable en los grados superiores.



Distribución de los alumnos de una escuela por grados y por sexo.

EJERCICIO 99.

Construir un gráfico de barras en cada uno de los siguientes casos:

1º) En un examen final de Historia la distribución de los alumnos según la calificación obtenida fue la siguiente:

Calificación	A	B	C	D	E	F
Número de alumnos	5	8	11	10	7	4

La calificación A equivale a sobresaliente (de 90 a 100), B equivale a notable (de 80 a 89,9) etc.

2º) En un instituto de segunda enseñanza la distribución de alumnos por cursos es la siguiente:

Cursos	1°	2°	3°	4°	5°
Número de alumnos	210	140	90	50	36

3º) Distancias que, a distintas velocidades, recorre un automóvil durante el "tiempo de reacción", esto es, durante el tiempo que transcurre entre el momento en que se ve un peligro y el momento en que se aplican los frenos.

Velocidad (en km/h)	20	30	40	50	60	70	80
Distancia (en metros)	4,16	6,25	8,33	10,4	12,5	14,6	16,6

4º) Producción de azúcar de caña, por principales países, en 1956, en toneladas:

Cuba	5 200 000	Filipinas	1 100 000
India	4 400 000	Puerto Rico	1 060 000
Brasil	2 100 000	Hawai	1 035 000
Australia	1 350 000	México	1 000 000
Pakistán	1 300 000	Argentina	750 000
Total mundial	25.000.000		

5º) La tabla siguiente da la cantidad de estaciones de televisión y la de receptores que hay en uso en los países indicados, según estimación de las Naciones Unidas para esos años. La interrogación indica que no hay cifra para ese año. Representar esos datos mediante un gráfico de barras, doble.

	1955		1956		1957	
E. U.	482	36 900 000	511	42 000 000	544	47 000 000
Reino Unido	16	5 400 000	19	6 570 000	24	7 761 000
Italia	15	?	64	?	173	674 000
Alemania Occ.	68	?	63	?	75	1 200 000
Canadá	26	?	33	?	40	2 730 000
Francia	11	?	16	?	25	683 000
Cuba	23	?	23	?	23	300 000
Japón	7	?	15	?	24	650 000
México	12	?	12	?	12	300 000
Colombia	4	?	7	?	8	100 000
Brasil	4	?	4	?	6	100 000
Suiza	3	?	4	?	6	31 000

113-3. Gráficos circulares.

Los gráficos circulares son útiles cuando se quiere representar el tamaño relativo de las partes en que se subdivide un todo. Para esto se hace corresponder a cada parte un sector circular cuya abertura sea proporcional a dicha parte, de tal manera que el todo quede representado por el círculo completo, en la forma que se explica detalladamente en el ejemplo siguiente:

Ejemplo. Una familia tiene una entrada anual de 60 000 \$, la cual distribuye como sigue:

Alquiler de casa	12 000 \$	Otros gastos	8 000 \$
Comida	18 000 „	Imprevistos	5 500 „
Ropa	7 500 „	Ahorro	9 000 „

Para representar, mediante un gráfico circular, la distribución anterior del presupuesto familiar, comenzaremos por calcular los porcentajes respectivos, es decir, averiguaremos qué tanto por ciento es 12 000 \$ de 60 000 \$, qué tanto por ciento es 18 000 \$ de 60 000 \$, etc. De este modo se obtiene:

Alquiler	$\frac{12\,000}{60\,000} = \frac{1}{5} = 20\%$
Comida	$\frac{18\,000}{60\,000} = \frac{3}{10} = 30\%$
Ropa	$\frac{7\,500}{60\,000} = \frac{1}{8} = 12,5\%$
Otros gastos	$\frac{8\,000}{60\,000} = \frac{2}{15} = 13,3\%$
Imprevistos	$\frac{5\,500}{60\,000} = \frac{11}{120} = 9,2\%$
Ahorro	$\frac{9\,000}{60\,000} = \frac{3}{20} = 15\%$
	100,0 %

La circunferencia tiene 360° ; el 1 % de 360° es $3,6^\circ$. Multiplicando el tanto por ciento de cada parte por 3,6 se obtiene el número de grados del sector circular que le corresponde. Así resulta:

Alquiler	$20 \times 3,6 = 72^\circ$
Comida	$30 \times 3,6 = 108^\circ$
Ropa	$12,5 \times 3,6 = 45^\circ$
Otros gastos	$13,3 \times 3,6 = 48^\circ$
Imprevistos	$9,2 \times 3,6 = 33^\circ$
Ahorro	$15 \times 3,6 = 54^\circ$
	360°

Con un radio conveniente se traza una circunferencia y con ayuda de un semicírculo graduado se marcan las aberturas de los diversos sectores. Finalmente, sobre cada sector se pone un letrero que indique claramente qué es lo que el sector representa. Se debe también poner al gráfico un título general apropiado.



Distribución del presupuesto de una familia.

EJERCICIO 100.

Construir un gráfico circular para cada uno de los siguientes casos:

1º) Durante el mes de septiembre el Observatorio Nacional registró 10 días de lluvia, 8 días nublados y 12 días de buen tiempo con cielo despejado.

2º) Una familia con ingresos de 10 000 \$ distribuye su presupuesto en la forma siguiente:

Alquiler	1 800 \$	Otros gastos	1 500 \$
Comida	2 500 „	Viajes	600 „
Ropa	2 000 „	Imprevistos	600 „
		Ahorro	1 000 „

3º) Un estudiante distribuye su tiempo según el horario siguiente:

Instituto	6 horas	Deportes	$2\frac{1}{2}$ horas
Comidas	2 „	Estudio	3 „
Transporte	1 „	Descanso	$9\frac{1}{2}$ „

4º) Cuando se paga 15 \$ por cierto objeto se puede calcular que esta cantidad se distribuye como sigue:

Materia prima	6,00 \$
Manufactura	3,00 „
Gastos del dept. de ventas	4,50 „
Ganancia líquida	1,50 „

5º) Principales flotas mercantes, por la cantidad de buques que poseen los siguientes países:

Comunidad Británica	7 400	Holanda	1 600
Estados Unidos	4 000	España	1 200
Noruega	1 900	Francia	1 100
Alemania	1 800	Rusia	1 100
Japón	1 600	Suecia	1 100

6º) Distribución de la población de los continentes, por millones de habitantes:

Asia	1 540	África	220
Europa	560	Sudamérica	130
Norteamérica	240	Oceanía	16

7º) Hacer dos gráficos, uno de importaciones y otro de exportaciones del Canadá en su comercio con los países iberoamericanos, de acuerdo con los siguientes datos que expresan el porcentaje de cada una de estas operaciones:

PAÍS	IMPORTACIONES	EXPORTACIONES
Argentina	0,59	0,45
Brasil	0,68	0,48
Cuba	0,36	—
Méjico	0,36	0,32
Venezuela	0,56	—

8º) Distribución de la población cubana por razas, según el censo de 1953:

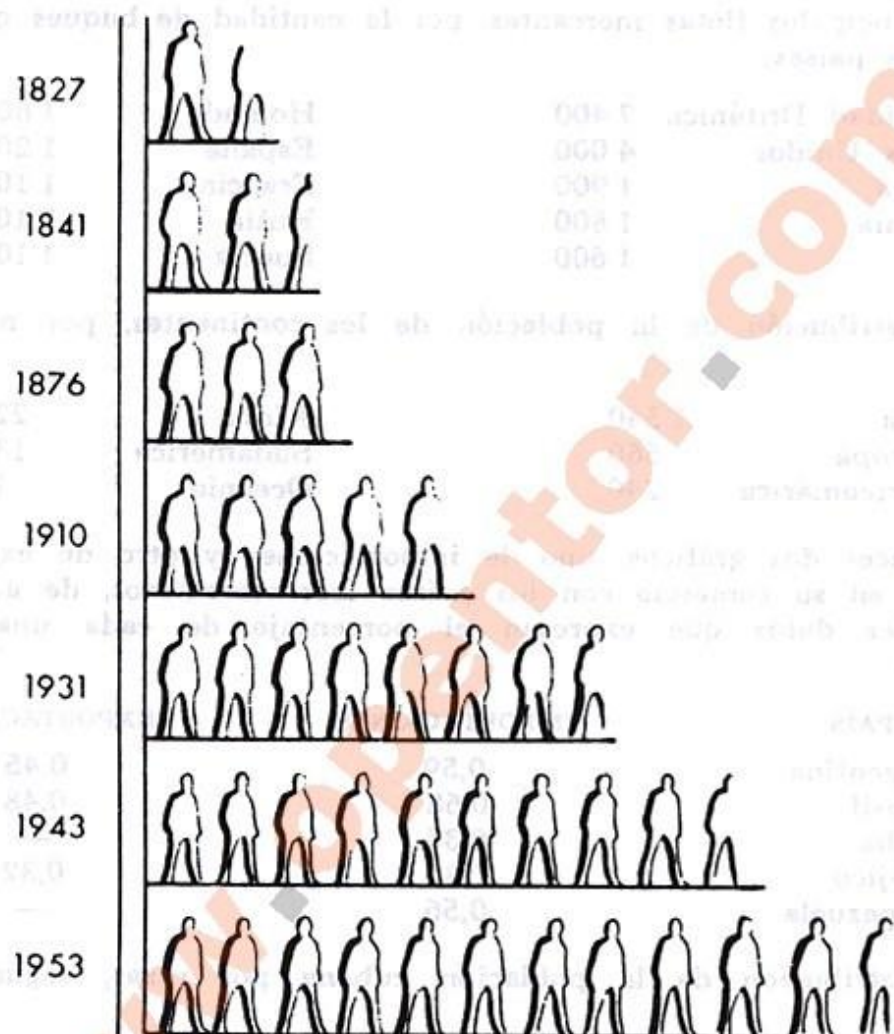
Blanca	4 243 996	Mestiza	843 105
Negra	725 311	Amarilla	16 657

113-4. Gráficos pictóricos o pictografías.

En los gráficos pictóricos o de figuras se utilizan dibujos convencionales (esquemas, siluetas, etc.) para representar cierto número de unidades de la magnitud que se considere. La cantidad que se ha de representar se indica entonces mediante la repetición de la figura cierto número de veces; una parte de la figura se puede utilizar para indicar fracciones de la unidad escogida. A veces se emplean figuras de distinto tamaño, proporcionado a las cantidades que se deseen representar.

Ejemplo. La figura que sigue es una pictografía que muestra el desarrollo de la población de un país de América. En este gráfico cada hombrechito representa 500 000 habitantes.

¿Cuál era aproximadamente la población de ese país en 1841?
¿Y en 1910?



EJERCICIO 101.

1º) Utilizando el signo de peso \$ para representar mil millones de dólares, construir un gráfico pictórico de los gastos del gobierno de los Estados Unidos, de acuerdo con los datos siguientes:

1910	700	millones
1922	3 800	"
1930	4 000	"
1935	7 400	"
1940	9 200	"
1945	98 700	"
1950	40 200	"
1955	75 600	"
1959	97 100	"

2º) Representando con el dibujo de un libro cada millar, y otro de menor tamaño cada centena, realizar un gráfico de la publicación de obras habida en 1957 en los siguientes países:

Canadá	2 400	E. U.	13 140
Cuba	450	Argentina	2 600

EJERCICIO 102 (REPASO).

1º) La base de un rectángulo es el doble de la altura. Si la altura tiene x metros, expresar el área A en función de x .

2º) La altura de un cilindro es dos veces el diámetro de la base. Expresar el volumen del cilindro en función del radio r de la base.

3º) Si el trabajo de linotipo cuesta 80 pesos e imprimir cada ejemplar de un folleto cuesta 8 centavos, expresar en pesos el costo total C de x ejemplares.

4º) En cierto país la carrera de un taxímetro cuesta 30 centavos el primer kilómetro y después 20 centavos por cada kilómetro adicional. Expresar en centavos el costo C del viaje en función del número x de kilómetros recorridos.

5º) Se tiene una pieza de cartón rectangular de 30 cm de largo por 20 cm de ancho. De cada esquina se corta un cuadrado de x cm de lado y se dobla el cartón para formar una caja de x cm de altura. Expresar el volumen de la caja en función de x .

6º) Dado $f(x) = 5x - 3$, hallar:

- a) $f(4)$ b) $f(-2)$ c) $f(0)$

7º) Dado $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, hallar:

- a) $f(-1)$ b) $f(0)$ c) $f(2)$

8º) Dado $f(x) = \frac{x}{x-2}$, hallar:

- a) $f(3)$ b) $f(-2)$ c) $f(a)$

9º) Dado $f(x) = ax + 3$, hallar a si $f(2) = 7$.

10º) Dada la ecuación $3x - y = 2$, expresar:

- a) y en función de x ; b) x en función de y .

11º) Dada la ecuación $xy + 2 = 0$, expresar:

- a) y en función de x ; b) x en función de y .

12º) Dada la ecuación $xy + x - y - 3 = 0$, expresar:

- a) y en función de x ; b) x en función de y .

13º) Dibujar ejes de coordenadas y marcar los siguientes puntos:

- a) $(-3, 5)$ b) $(5, -3)$
c) $(4, 1)$ d) $(-2, -6)$

14º) Dibujar ejes de coordenadas y marcar los siguientes puntos:

a) $(4,5, -1)$

b) $(0, -1,5)$

c) $(2,4, -2)$

d) $(-\sqrt{2}, 0)$

15º) Comprobar que los siguientes puntos están sobre una misma recta: $(-3, -4)$, $(1, 0)$, $(3, 2)$, $(7, 6)$. Hallar gráficamente las coordenadas de otros dos puntos de esta recta.

16º) Comprobar gráficamente que los puntos $(1, 7)$, $(-5, -1)$ y $(1, -9)$ son vértices de un triángulo isósceles.

17º) Comprobar gráficamente que los puntos $(3, 1)$, $(4, -2)$ y $(13, 1)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

18º) Comprobar gráficamente que los puntos $(1, 2)$, $(5, 3)$, $(7, -5)$ y $(3, -6)$ son vértices de un paralelogramo.

19º) Construir el gráfico de la función dada por la tabla de valores siguiente:

x	-3	-2	-1	0	,5	1	2	3
y	12	6	2	0	-,25	0	2	6

20º) La siguiente tabla da los pesos de una criatura durante los primeros meses de vida:

Edad (meses)	0	1	2	3	4	5	6	8	10	12
Peso (libras)	8,5	9,3	11,0	13,2	15,5	18,5	20,4	23,0	24,0	24,5

Representar gráficamente la variación de su peso con la edad.

Construir el gráfico de las funciones siguientes:

21º) $y = x + 3$

22º) $y = -x + 2$

23º) $y = 0,1x$

24º) $y = 2x - 5$

25º) $y = -2x + 3$

26º) $x = y - 4$

27º) $x + 2y = 6$

28º) $3x - y = 7$

29º) $y - x = 8$

30º) $F = \frac{9}{5}C + 32$

31º) $y = \frac{5}{x}$

32º) $y = \frac{8}{x}$

33º) $y = \frac{-6}{x}$

34º) $y = \frac{1}{x} + 2$

35º) $y = 3x^2$

36º) $y = -2x^2$

37º) $x = y^2$

38º) $x = -0,5y^2$

39º) $y = x^2 + x$

40º) $y = x^2 - 5$

41º) Si y es directamente proporcional a x y para $x=3$ es $y=1$, expresar y como función de x . Hallar el valor de y para $x=12$.

42º) Si y es directamente proporcional a x y para $x=4$ es $y=6$, expresar y como función de x . Hallar el valor de y para $x=-3$.

43º) La fuerza F necesaria para estirar un muelle es proporcional al estiramiento x . Para $x=2$ cm se necesita $F=5$ lb. Expresar F en función de x y hallar el valor de F cuando $x=3$ cm.

44º) y es inversamente proporcional a x . Para $x=20$ es $y=5$. Expresar y en función x . Determinar el valor de y cuando $x=4$.

45º) u es inversamente proporcional a z . Para $z=4,5$ es $u=-10$. Expresar u en función de z . Hallar u para $z=9$.

46º) Si PW es constante y si $P=30$ cuando $W=6$, ¿cuál es el valor de P para $W=12$?

47º) Cuando el voltaje es constante la intensidad de la corriente I es inversamente proporcional a la resistencia R del circuito. Si la corriente es de 4 amperios cuando la resistencia es de 80 ohmios, expresar I en función de R . Hallar I cuando $R=100$ ohmios.

48º) y es proporcional al cuadrado de x y se sabe que $y=72$ para $x=3$. Expresar y en función de x . Hallar y para $x=4$.

49º) El consumo C de carbón de una locomotora (en toneladas por hora) es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad v (en km por hora). Se necesitan 4 toneladas por hora para mantener una velocidad de 50 km por hora. Expresar C en función de v . ¿Cuánto es el consumo cuando $v=40$ km/h?

50º) y es inversamente proporcional al cuadrado de x y se sabe que para $x=2$ es $y=5$. Expresar y en función de x y hallar el valor de y para $x=4$.

51º) La intensidad de iluminación sobre una superficie es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el foco de luz y la superficie. Si la iluminación que recibe el papel sobre el cual escribo es de 80 bujías cuando la luz se encuentra a una distancia de 200 cm, ¿cuál será la iluminación cuando la luz se encuentre a una distancia de 100 cm?

52º) Si u es directamente proporcional a y e y es inversamente proporcional a x , ¿cómo depende u de x ?

Escribir una fórmula que exprese la relación funcional que se indica en cada uno de los enunciados siguientes (nºs 53 a 60):

53º) Z es directamente proporcional a u e inversamente proporcional a h .

54º) S es directamente proporcional a r y a g .

55º) V es directamente proporcional a r^2 y a h . Para $r=2$, $h=3$ es $V=4\pi$.

56º) F es directamente proporcional a m y a l e inversamente proporcional a r .

57º) G es directamente proporcional a L e inversamente proporcional a v^2 .

58º) H es directamente proporcional a m y al cubo de t .

59º) P es directamente proporcional a la raíz cuadrada de u e inversamente proporcional a v .

60º) Q es directamente proporcional a ux e inversamente proporcional a yz .

61º) La superficie de pared que se va levantando en una obra es directamente proporcional al número de obreros y al número de días que trabajan. Si hicieron 720 m^2 de pared, trabajando 10 obreros, durante 9 días, ¿qué superficie levantarán 12 obreros, en 8 días?

62º) La presión del viento sobre una valla anunciadora es directamente proporcional al área de la valla y al cuadrado de la velocidad del viento. Cuando el viento es de 24 km/h la presión sobre 1 pie cuadrado es de 1 libra. Calcular la presión sobre una valla de 20 pies cuadrados cuando la velocidad del viento es de 30 km/h .

63º) La intensidad de la gravedad en la superficie de un planeta es directamente proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de su radio. Sabiendo que la masa de Saturno es aproximadamente 93 veces la de la Tierra, y que la intensidad de la gravedad en su superficie es $8/7$ de la de la Tierra, hallar la longitud del radio de Saturno tomando el radio de la Tierra como unidad.

Estudiar la proporcionalidad en las siguientes fórmulas:

$$64^\circ) A = 2\pi rh$$

$$65^\circ) v = \frac{kT}{p}$$

$$66^\circ) P = k \frac{WT}{v}$$

$$67^\circ) F = k \frac{qq'}{r^2}$$

$$68^\circ) S = \pi r(r + g)$$

$$69^\circ) T^2 = ka^3$$

$$70^\circ) D = -\frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EI}$$

$$71^\circ) D = -\frac{5wl^4}{384EI}$$

72º) El peso promedio de los varones para edades comprendidas entre 6 y 15 años se ofrece en libras en la siguiente tabla:

Edad	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Peso	50	53	57	62	67	72	78	85	93	105

Construir el gráfico lineal correspondiente.

73º) La siguiente tabla presenta la producción francesa y la producción alemana de aviones de primera clase entre los años 1934 y 1939. Hacer un gráfico comparativo construyendo las gráficas lineales correspondientes.

AÑO	FRANCIA	ALEMANIA
1934	1 300	900
1935	1 200	1 800
1936	740	2 500
1937	1 000	2 600
1938	1 200	3 250
1939	1 450	4 600

74º) Construir un gráfico de barras que represente los siguientes datos relativos al número de accidentes automovilísticos ocurridos en una ciudad a distintas horas del día:

H O R A	NUMERO DE ACCIDENTES
6 a. m.	30
12 m.	80
6 p. m.	125
12 p. m.	50

75º) Algunos países latinoamericanos exportan principalmente un solo producto. Ilustrar mediante un gráfico de barras cuánto representa, con respecto al total de sus exportaciones, el producto indicado para cada país, según las cifras siguientes:

Venezuela	petróleo	94 %
El Salvador	café	86 %
Colombia	café	84 %
Cuba	azúcar	80 %
Panamá	bananas	76 %
Bolivia	estaño	60 %
Brasil	café	59 %
Chile	cobre	58 %

76º) Construir un gráfico circular para ilustrar la siguiente distribución de los principales idiomas según el número de personas que los hablan:

chino	500 millones	alemán	100 millones
inglés	260 "	portugués	75 "
ruso	200 "	francés	70 "
indo	180 "	italiano	50 "
español	160 "	otros	1 105 "

77º) Según los censos agrícolas la distribución del ganado porcino en 1956 era como sigue, en millones de cabezas:

China	90	Polonia	10
Rusia	51	México	8
E. U.	50	Francia	7
Brasil	35	Argentina	4
Alemania	15		

Utilizar la silueta de un cerdo en tres tamaños para representar 10 millones, 5 millones y 1 millón de cabezas, respectivamente y dibujar el gráfico pictórico correspondiente.

78º) Buscar en periódicos y revistas gráficos de distintos tipos. Traerlos a clase para interpretarlos y discutirlos.

TEST 12.

1º) En papel cuadrulado marcar ejes de coordenadas y situar los puntos $(-1, -5)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$ y $(4, 10)$. Decir si se encuentran o no en línea recta.

2º) Dado $f(x) = \frac{x}{2x-1}$ hallar:

- a) $f(1)$ b) $f(0)$ c) $f(-2)$

3º) Dadas las funciones

a) $y = \frac{3}{2}x$

b) $y = -x + 1$

c) $y = 2x^2$

identificar en la figura de pág. siguiente sus gráficos correspondientes.

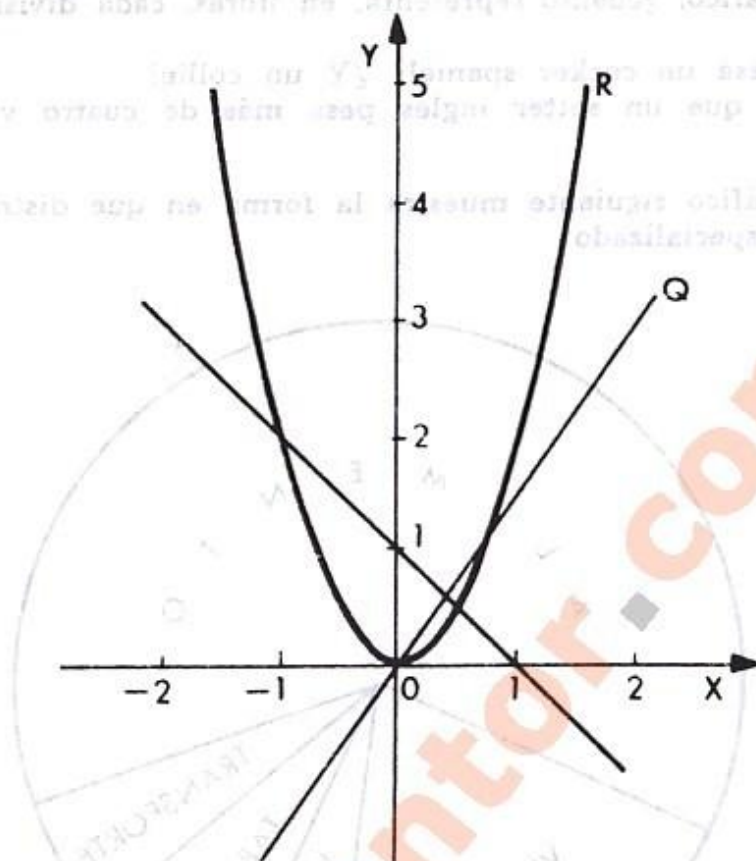
4º) El tiempo t que emplea un móvil en recorrer con movimiento uniforme una distancia dada, es inversamente proporcional a su velocidad. Si para $v = 20 \text{ m/s}$ es $t = 8 \text{ s}$, a) expresar t en función de v ; b) hallar t cuando $v = 16 \text{ m/s}$.

5º) Para un ángulo de tiro constante, el alcance máximo de un proyectil es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad inicial. Si el alcance máximo es de 15 000 m cuando la velocidad inicial es de 500 m/s, escribir la fórmula que expresa en este caso el alcance máximo en función de la velocidad inicial. Hallar el alcance máximo cuando la velocidad inicial es de 300 m/s.

6º) Estudiar la proporcionalidad en la fórmula

$$E = k \frac{H\alpha}{r^2}$$

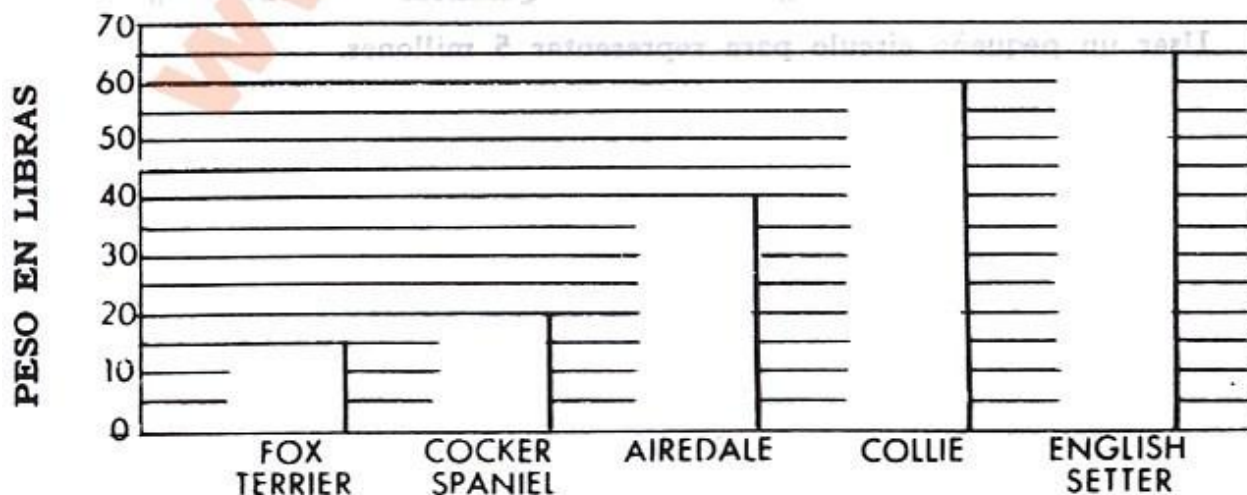
y expresar el tipo de variación que resulte en lenguaje ordinario.



7º) Construir un gráfico lineal que exprese las variaciones, en pies, del nivel de las aguas de un río durante la primera semana de abril:

Fecha	1	2	3	4	5	6	7
Profundidad del río (en pies)	6,0	6,5	7,5	9,0	10,7	11,4	9,5

8º) El gráfico siguiente muestra los pesos de varias razas de perros:

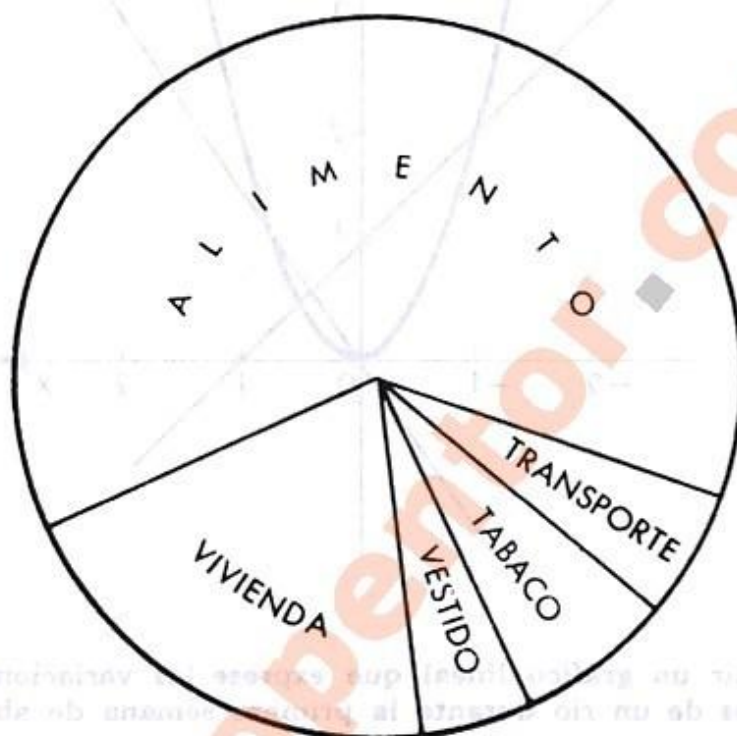


En este gráfico, ¿cuánto representa, en libras, cada división de la escala horizontal?

¿Cuánto pesa un cocker spaniel? ¿Y un collie?

¿Es cierto que un setter inglés pesa más de cuatro veces lo que un fox terrier?

9º) El gráfico siguiente muestra la forma en que distribuye su salario un obrero no especializado:



¿Qué conclusiones puede usted sacar del estudio de este gráfico?

10º) Construir un gráfico pictórico con los datos siguientes relativos al capital invertido en algunas industrias:

Metalúrgicas	15 millones	Tabacalera	5 millones
Papeleras	11 "	Comestibles	40 "
Peletería	4 "	Químicas	29 "

Usar un pequeño círculo para representar 5 millones.



CAPÍTULO 13.

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

114. Definiciones.

Las ecuaciones de la forma

$$[1] \quad ax + by = c$$

en donde a , b y c son constantes y $a \neq 0$, $b \neq 0$, se llaman *ecuaciones de primer grado con dos incógnitas*. También se llaman *ecuaciones lineales*, pues, como vimos en el capítulo anterior, sus gráficos correspondientes son líneas rectas. La denominación de *lineal* se aplica también, por extensión, a todas las ecuaciones algebraicas de primer grado, es decir, a todas aquellas que, después de reducidas a forma polinómica, tienen todos sus términos de primer grado o constantes. Por ejemplo,

$$ax + by + cz = d$$

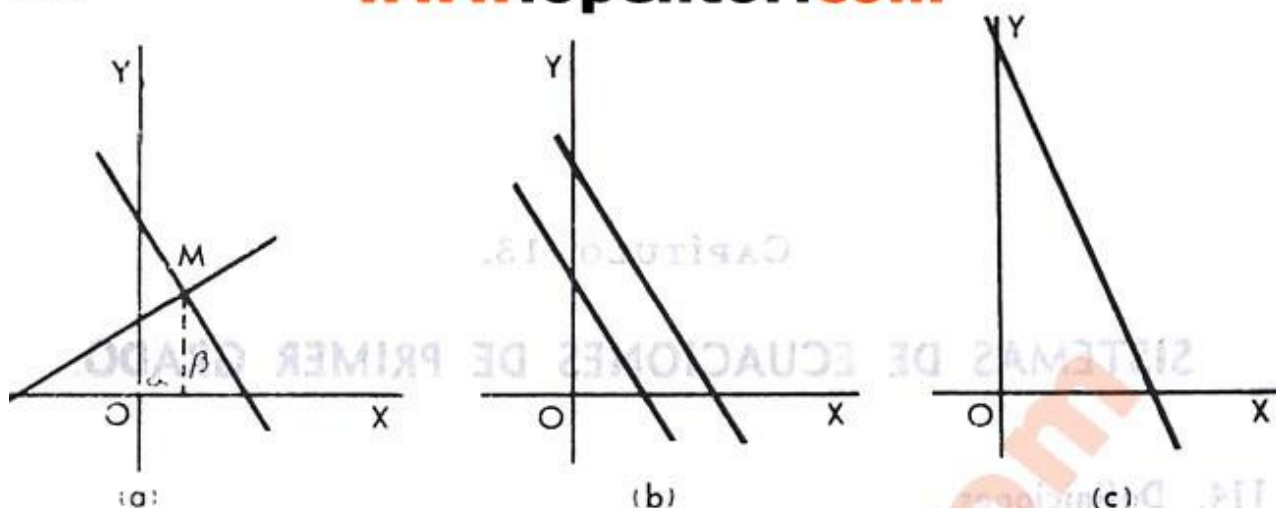
es una ecuación *lineal* con tres incógnitas. Las expresiones *lineal* y *de primer grado* se consideran, pues, como sinónimas.

Una ecuación *lineal* con dos o más incógnitas admite una infinidad de soluciones. Por ejemplo,

$$[2] \quad 2x - y = 5$$

admite las soluciones $x = 1$, $y = -3$; $x = 2$, $y = -1$, etc. Estas soluciones son las coordenadas de los infinitos puntos de la recta representativa de la ecuación [2].

Veamos qué sucede cuando tenemos dos ecuaciones de primer grado con las mismas incógnitas x e y . Representando gráficamente estas ecuaciones con respecto a los mismos ejes, resulta uno de los casos que muestra la figura, a saber: a) las rectas



correspondientes tienen un punto común; b) las rectas son paralelas; c) las rectas coinciden.

En el primer caso las ecuaciones correspondientes tienen una solución común; es decir, hay solamente un par de valores (α, β) que satisface a ambas ecuaciones (las coordenadas del punto común M).

En el segundo caso las rectas no tienen punto común alguno; las ecuaciones no tienen solución común, es decir, ninguna solución de la primera ecuación satisface a la segunda ecuación.

En el tercer caso toda solución de la primera ecuación lo es también de la segunda. Las ecuaciones son entonces equivalentes.

Llamaremos *sistema de ecuaciones* a todo conjunto de ecuaciones, con las mismas incógnitas, cuyas soluciones comunes nos proponemos obtener, en caso de que existan. El sistema se llama *lineal* cuando todas sus ecuaciones son de primer grado.

Ejemplo. Las ecuaciones

$$2x - 3y = 5$$

$$3x + y = 7$$

forman un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Cuando el sistema contiene una o varias ecuaciones de segundo grado, y ninguna ecuación de grado superior al segundo, se le llama *cuadrático*.

En el presente capítulo sólo estudiaremos sistemas de ecuaciones lineales. En un capítulo posterior estudiaremos algunos sistemas cuadráticos.

Solución de un sistema de ecuaciones es todo conjunto de valores de las incógnitas que satisfaga al propio tiempo todas las ecuaciones.

Como hemos indicado anteriormente, un sistema puede tener solución o no. En el primer caso se dice que el sistema es *posible*; en el segundo caso se dice que el sistema es *imposible*. El sistema posible con infinitas soluciones se llama *indeterminado*.

Cuando un sistema es posible sus ecuaciones se denominan **simultáneas**, puesto que quedan satisfechas al propio tiempo o simultáneamente para ciertos valores de las incógnitas.

Resolver un sistema es hallar sus soluciones, o demostrar que carece de ellas.

En lo que sigue estudiaremos los siguientes métodos para resolver sistemas lineales:

- a) Método de adición y sustracción, o de reducción.
- b) Método de sustitución.
- c) Método gráfico (solamente para los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas).
- d) Método de los determinantes.

115. Método de adición y sustracción.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se **elimina** una de las incógnitas y se procede a resolver la ecuación resultante con respecto a la otra incógnita. Esta eliminación de una de las incógnitas puede lograrse sumando o restando las ecuaciones dadas, después de haberlas multiplicado, en caso necesario, por números convenientes.

Una vez hallado el valor de una incógnita, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones del sistema, la cual se resuelve entonces con respecto a la otra incógnita. O bien, se calcula directamente su valor, mediante la eliminación de la incógnita ya determinada.

El método de adición y sustracción se llama también método de **reducción**. Estudiando con detenimiento los ejemplos que siguen, se comprenderá bien la técnica del método.

Ejemplos.**1. Consideremos el sistema**

$$[1] \quad 7x + y = 19$$

$$[2] \quad 4x - y = 3$$

Basta sumar las ecuaciones miembro a miembro para eliminar la y , obteniéndose:

$$11x = 22$$

$$\text{ó} \quad x = 2.$$

Sustituyendo este valor de x en la ecuación [1] resulta:

$$7(2) + y = 19$$

$$14 + y = 19$$

$$y = 5.$$

Comprobación. Sustituyendo los valores encontrados en la ecuación [2] se tiene:

$$4(2) - 5 = 3 \quad \text{ó} \quad 3 = 3.$$

También se puede hallar el valor de y mediante la eliminación de la x entre las ecuaciones dadas. Para lograr esta eliminación se comienza por hacer que los coeficientes de x sean iguales en ambas ecuaciones, para lo cual basta multiplicar la ecuación [1] por 4 (que es el coeficiente de x en [2]); y la ecuación [2] por 7 (que es el coeficiente de x en [1]). Después basta restar una ecuación de otra para que se eliminen los términos que contienen x . He aquí las operaciones necesarias, las cuales se indican brevemente al margen:

$$[3] \quad [1] \times 4 \quad 28x + 4y = 76$$

$$[4] \quad [2] \times 7 \quad 28x - 7y = 21$$

$$[3] - [4] \quad 11y = 55$$

$$y = 5.$$

El método indicado primeramente, consistente en sustituir el valor ya hallado en una de las ecuaciones del sistema, es en general más breve y debe preferirse.

2. Resolver el sistema

$$[5] \quad 3x + 8y = 23$$

$$[6] \quad 11x + 6y = -9$$

Para eliminar y en este sistema basta multiplicar la ecuación [5] por 3 y la [6] por 4, ya que de este modo se obtiene 24 como coeficiente de la y en ambas ecuaciones:

$$[7] \quad [5] \times 3 \quad 9x + 24y = 69$$

$$[8] \quad [6] \times 4 \quad 44x + 24y = -36$$

$$[7] - [8] \quad \begin{array}{r} 9x + 24y = 69 \\ 44x + 24y = -36 \\ \hline -35x = 105 \\ x = -3 \end{array}$$

Sustituyendo este valor de x en la ecuación [5] se encuentra:

$$3(-3) + 8y = 23$$

$$8y = 32$$

$$y = 4.$$

En general, en el caso de ecuaciones con coeficientes enteros, para hallar los números más pequeños por los cuales hay que multiplicar las ecuaciones, de modo que se obtenga en ambas el mismo coeficiente para una de las incógnitas, basta aplicar la siguiente

REGLA. *Hállese el m. c. m. de los coeficientes de la incógnita que se desea eliminar. Divídase este m. c. m. por el coeficiente de dicha incógnita en la primera ecuación. El cociente dará el multiplicador que hay que usar para la primera ecuación. Análogamente, dividiendo el m. c. m. por el coeficiente de esta incógnita en la segunda ecuación se obtiene el multiplicador correspondiente a la segunda ecuación.*

Así, por ejemplo, en el caso del sistema [5]-[6], en el cual se quiere eliminar la y , se tiene:

$$\text{m. c. m. } (8, 6) = 24$$

$$24 : 8 = 3 = \text{multiplicador de la ecuación [5]}$$

$$24 : 6 = 4 = \text{multiplicador de la ecuación [6].}$$

Entre las dos incógnitas, se debe escoger, para ser eliminada, aquélla que requiera multiplicadores más pequeños.

Si los coeficientes de las incógnitas fuesen números fraccionarios se comenzaría por reducirlos a la forma entera, multiplicando la ecuación por el m. c. m. de los denominadores. En casos especiales, sin embargo, puede ser preferible dejar los coeficientes en forma fraccionaria.

EJERCICIO 103.

Resolver los sistemas siguientes aplicando el método de adición y sustracción:

$$1^{\circ}) \quad \begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

$$2^{\circ}) \quad \begin{cases} x - y = -5 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$3^{\circ}) \quad \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

$$4^{\circ}) \quad \begin{cases} x + 4y = 14 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$$

$$5^{\circ}) \quad \begin{cases} 6x - y = 13 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

$$6^{\circ}) \quad \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x + 3y = 37 \end{cases}$$

$$7^{\circ}) \quad \begin{cases} 2x + 9y = 32 \\ 4x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$8^{\circ}) \quad \begin{cases} -10x + 11y = 36 \\ 4x - 5y = -18 \end{cases}$$

$$9^{\circ}) \quad \begin{cases} 5x - 6y = -2 \\ 3x + 8y = 80 \end{cases}$$

$$10^{\circ}) \quad \begin{cases} 13x + 15y = 17 \\ -7x + 10y = 27 \end{cases}$$

$$11^{\circ}) \quad \begin{cases} x + 12y = 58 \\ 5x - 8y = 18 \end{cases}$$

$$12^{\circ}) \quad \begin{cases} 9x + 20y = 33 \\ 8x + 15y = 21 \end{cases}$$

$$13^{\circ}) \quad \begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = 5x - 4 \end{cases}$$

$$14^{\circ}) \quad \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 6 \\ \frac{1}{6}x - \frac{1}{4}y = -1 \end{cases}$$

$$15^{\circ}) \quad \begin{cases} y = 0,2(8 - x) \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$$

$$16^{\circ}) \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y - 9 \\ y = \frac{3}{4}x + 3 \end{cases}$$

$$17^{\circ}) \quad \begin{cases} 0,2x + 0,3y = 8 \\ 0,5x - 0,4y = -3 \end{cases}$$

$$18^{\circ}) \quad \begin{cases} 0,6x - 0,5y = -0,9 \\ 0,3x - 0,4y = -1,8 \end{cases}$$

$$19^{\circ}) \quad \begin{cases} 25x + 32y = 13 \\ 35x - 12y = 4 \end{cases}$$

$$20^{\circ}) \quad \begin{cases} 100x + 33y = 21 \\ 70x - 9y = 4 \end{cases}$$

116. Método de sustitución.

Este método consiste en resolver una de las ecuaciones del sistema con respecto a una de las incógnitas, (en función de la otra), y sustituir la expresión encontrada en la segunda ecuación. Se obtiene entonces una ecuación lineal con una sola incógnita, la cual se resuelve por el procedimiento ya conocido. Una vez encontrado el valor de una de las incógnitas es fácil determinar, por sustitución del valor hallado, el valor de la otra incógnita.

Ejemplos.

1. Resolver el sistema

$$[1] \quad 2x - 3y = 6$$

$$[2] \quad 3x + y = 20$$

Despejando la incógnita y en la ecuación [2] se tiene

$$[3] \quad y = 20 - 3x$$

Sustituyendo ahora este valor de y en [1]:

$$[4] \quad 2x - 3(20 - 3x) = 6$$

La ecuación [4] sólo contiene la incógnita x ; resolviéndola obtenemos sucesivamente:

$$2x - 60 + 9x = 6$$

$$11x = 66$$

$$x = 6.$$

Sustituyendo $x = 6$ en [3] resulta:

$$y = 20 - 18 = 2.$$

2. Resolver el sistema

$$[5] \quad 2x + 5y = -6$$

$$[6] \quad 3x - 4y = 14$$

Despejando x en la ecuación [5] se obtiene

$$[7] \quad x = -\frac{6 + 5y}{2}$$

Sustituyendo este valor de x en [6]:

$$[8] \quad 3 \left(-\frac{6+5y}{2} \right) - 4y = 14$$

Resolviendo la ecuación [8]:

$$-18 - 15y - 4y = 28$$

$$-23y = 46$$

$$y = -2.$$

Sustituyendo $y = -2$ en [7] resulta:

$$x = -\frac{6-10}{2} = +2.$$

Al aplicar el método de sustitución se puede empezar por resolver cualquiera de las ecuaciones del sistema con respecto a una u otra de las incógnitas que contiene. Sin embargo, es preferible escoger la ecuación más sencilla y resolverla con respecto a la incógnita que tenga menor coeficiente. Por ejemplo, si una de las ecuaciones del sistema es $5x + y = 8$, es mejor resolver esta ecuación con respecto a y que con respecto a x .

En la resolución de los sistemas lineales el método de adición y sustracción es más ventajoso que el de sustitución. No obstante conviene conocer este último porque más adelante encontrará aplicación útil en la resolución de los sistemas de ecuaciones de grado superior al primero (v. gr. en los sistemas cuadráticos).

EJERCICIO 104.

Resolver los sistemas siguientes aplicando el método de sustitución:

$$1^{\circ}) \quad \begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ 3x - 2y &= 14 \end{aligned}$$

$$2^{\circ}) \quad \begin{aligned} 5x + 9y &= 17 \\ x + 4y &= 10 \end{aligned}$$

$$3^{\circ}) \quad \begin{aligned} 4x - 3y &= 8 \\ 3x + 2y &= 23 \end{aligned}$$

$$4^{\circ}) \quad \begin{aligned} 8x + 3y &= 5 \\ 7x - 6y &= 1,5 \end{aligned}$$

$$5^{\circ}) \quad \begin{aligned} 10x - 3y &= 16 \\ 4x - 7y &= 18 \end{aligned}$$

$$6^{\circ}) \quad \begin{aligned} 0,3x - y &= 0 \\ 0,5x + 0,4y &= 12,4 \end{aligned}$$

$$7^{\circ}) \quad \begin{aligned} 5x + 2y &= -21 \\ 3x - 4y &= 3 \end{aligned}$$

$$8^{\circ}) \quad \begin{aligned} 4x &= 5y + 22 \\ 3y &= 2x - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9^\circ) \quad 5x + 6y &= 2 \\ 2x - 3y &= -0,1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^\circ) \quad \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y &= 3 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y &= 4,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11^\circ) \quad 6s + 5t &= 22 \\ 2s + 7t &= -14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12^\circ) \quad -8u + 5v &= 42 \\ 7u + 2v &= 27. \end{aligned}$$

117. Método gráfico.

Sabemos que el gráfico de una ecuación de primer grado con dos variables x e y es una línea recta. En esta recta están todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación y solamente ellos.

Para resolver gráficamente un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, tal como

$$[1] \quad x + 2y = 8$$

$$[2] \quad x - y = -1$$

se toma un sistema de ejes rectangulares y se construye la recta representativa de cada una de las ecuaciones del sistema. Si las rectas que resultan son distintas y se cortan en un punto, las coordenadas del punto común (las cuales se miden sobre el papel) darán la solución del sistema.

En efecto, el gráfico de [1] se compone de todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen [1] y el gráfico de [2] se compone de todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen [2]. Por tanto, las coordenadas de un punto que pertenece a ambos gráficos satisfacen ambas ecuaciones y proporciona la solución del sistema. Puesto que dos rectas no se cortan más que en un punto, un sistema lineal posible, y no indeterminado sólo admite una solución.

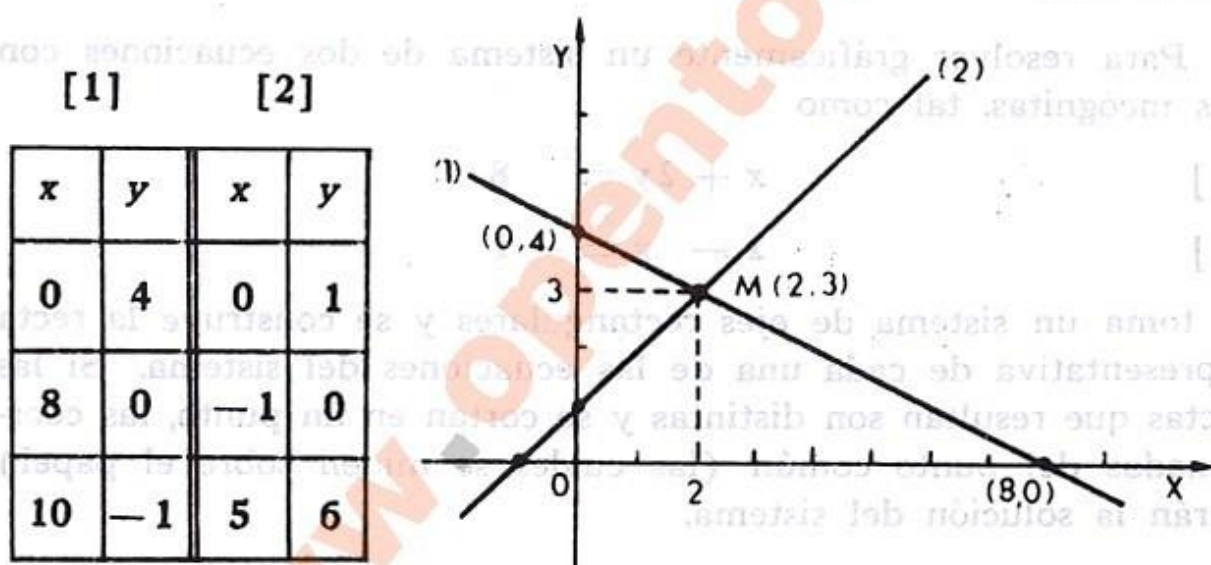
Para resolver el sistema [1]-[2] comenzaremos por calcular tablas de valores correspondientes, como las que se presentan al margen de la figura siguiente. Después trazaremos los ejes de coordenadas y construiremos las rectas representativas de dichas ecuaciones.

Estas rectas se cortan en el punto $M(2, 3)$. Por tanto, el sistema tiene la solución

$$x = 2, \quad y = 3.$$

Para comprobarlo, basta sustituir estos valores en las ecuaciones dadas.

Para dibujar la recta que corresponde a cada ecuación se escogen generalmente los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas. Estos puntos se determinan haciendo sucesivamente $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación y resolviendo con respecto a la otra variable. Así, la ecuación [1] da para $x = 0$, $y = 4$; y para $y = 0$, $x = 8$. Sus intersecciones con los ejes son, pues, los puntos $(0, 4)$ y $(8, 0)$.



Análogamente, las intersecciones de la segunda recta con los ejes son los puntos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$. En ambos casos se ha marcado un tercer punto adicional como medio de verificar la corrección de la recta dibujada.

Observaremos que el método de escoger las intersecciones con los ejes para construir la recta no es siempre el más práctico, especialmente cuando alguna de estas intersecciones queda muy lejos del origen, o cuando ambas quedan muy próximas a él, pues, como ya advertimos en § 111, ejemplo 3, dos puntos próximos no determinan bien una recta en el dibujo.

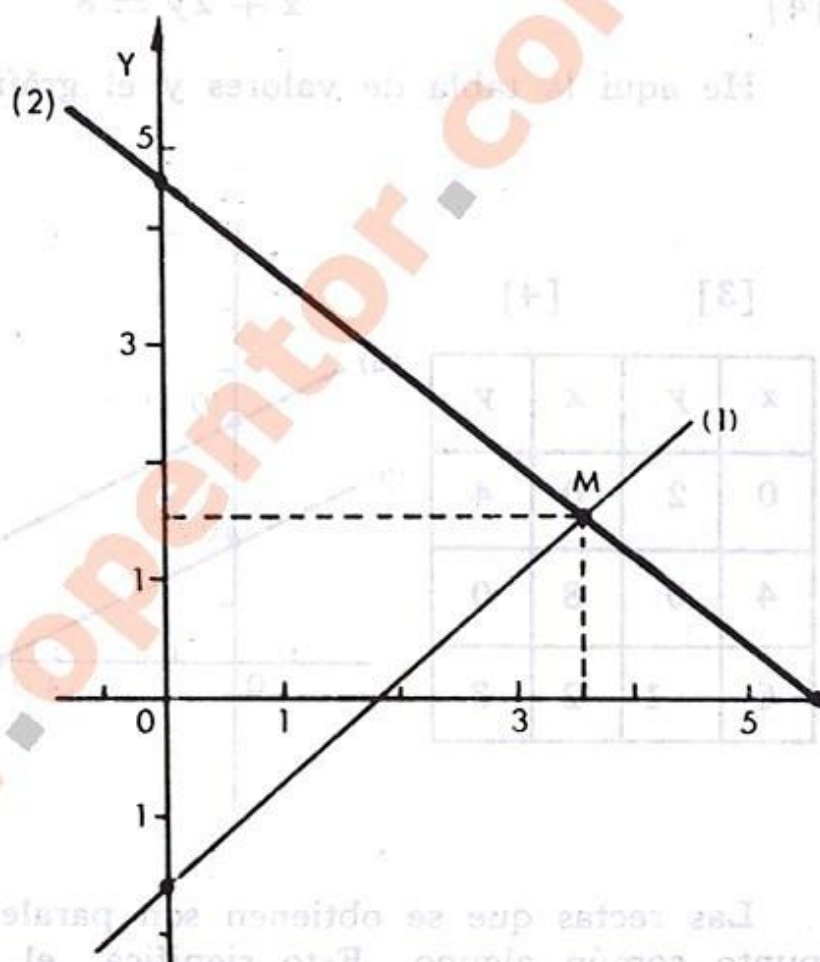
Otros ejemplos.

1. Resolver gráficamente el sistema

$$\begin{array}{l} [1] \quad 10x - 10y = 19 \\ [2] \quad 4x + 5y = 22 \end{array}$$

A continuación presentamos las tablas de valores y el gráfico correspondiente.

[1]		[2]	
x	y	x	y
0	-1,9	0	4,4
1,9	0	5,5	0
5	3,1	3	2



Las coordenadas del punto de intersección M no son números enteros. Midiendo la abscisa y la ordenada de M con la regla graduada se encuentra que, al menos aproximadamente,

$$x = 3,5, \quad y = 1,6.$$

Sustituyendo en [1] y en [2] se comprueba que los valores hallados son correctos.

Es evidente que, en general, los resultados que se obtengan

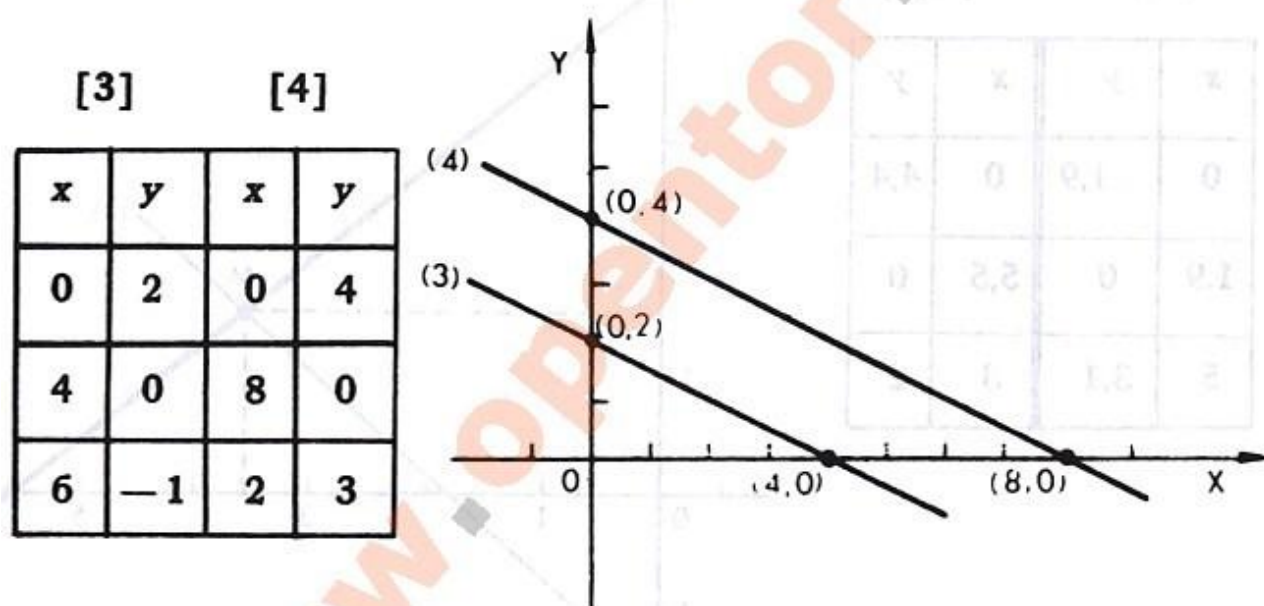
por el método gráfico serán sólo aproximados. La aproximación será tanto mayor cuanto más cuidado y habilidad se pongan en el dibujo. La aproximación alcanzada dependerá también del tamaño de la escala que se adopte para la construcción: una escala mayor proporcionará, en general, mejor aproximación.

2. Resolver gráficamente el sistema

$$[3] \quad x + 2y = 4$$

$$[4] \quad x + 2y = 8$$

He aquí la tabla de valores y el gráfico correspondiente:



Las rectas que se obtienen son paralelas, es decir, no tienen punto común alguno. Esto significa: el sistema dado no tiene solución. Se trata, pues, de un sistema imposible. También se dice que las ecuaciones [3] y [4] son *incompatibles*.

Algebraicamente es evidente que el sistema propuesto no tiene solución, pues si existiesen valores de x e y que satisficieran a [3] y [4], resultaría el absurdo $4 = 8$.

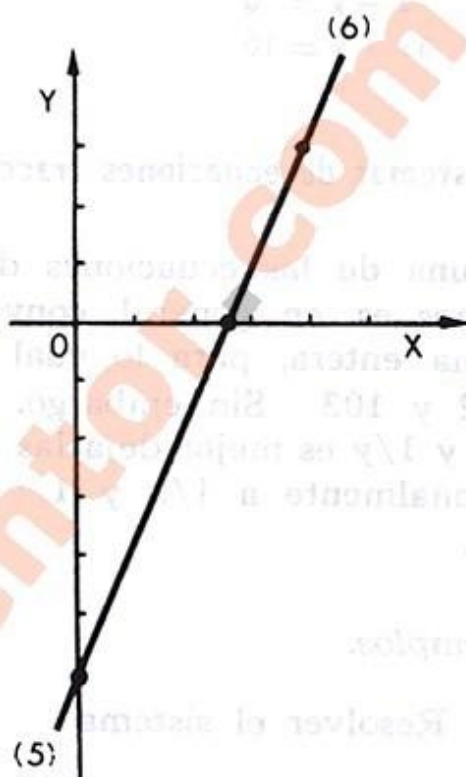
3. Resolver gráficamente el sistema:

$$[5] \quad 2x - y = 5$$

$$[6] \quad 4x - 2y = 10$$

Las tablas de valores correspondientes muestran que estas dos ecuaciones definen una misma relación o función entre x e y ; además, es fácil ver que simplificando la segunda ecuación (mediante la eliminación del factor 2, común a todos sus términos) se obtiene la primera. Por consiguiente, la recta representativa de [6] coincide con la recta representativa de [5].

[5]		[6]	
x	y	x	y
0	-5	0	-5
2,5	0	2,5	0
4	3	4	3



EJERCICIO 105.

Resolver gráficamente los sistemas siguientes:

1º) $x + y = 10$
 $x - y = 2$

2º) $x - y = 3$
 $x + y = 9$

3º) $2x + y = 6$
 $3x - y = 4$

4º) $x + 2y = 5$
 $2x - y = -5$

5º) $3x + y = 7$
 $2x + y = 4$

6º) $x - 2y = -5$
 $3x - y = 10$

7º) $6x - y = 7$
 $2x + y = 5$

8º) $2x + 3y = 12$
 $4x + 6y = 36$

9º) $2x - 3y = 8$
 $3x + y = -10$

10º) $y = 2x + 3$
 $y = -x + 6$

11º) $x = y - 2,2$
 $x = 3y - 9$

12º) $2x - y = 3$
 $4x - 2y = 6$

$$\begin{aligned} 13^\circ) \quad x + 4y &= 7 \\ -3x + 2y &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15^\circ) \quad 3x - 4y &= 6 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17^\circ) \quad 6x + y &= 29 \\ 3x - y &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19^\circ) \quad x - y &= 0 \\ 3x + y &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14^\circ) \quad x - 2y &= 5 \\ 2x - 4y &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16^\circ) \quad 5x + 2y &= 10 \\ 2,5x + y &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18^\circ) \quad x + 3y &= 2 \\ 2x - 5y &= -18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20^\circ) \quad 4x - 5y &= 0 \\ x + 2y &= 26 \end{aligned}$$

118. Sistemas de ecuaciones fraccionarias.

Si una de las ecuaciones de un sistema, o ambas, contienen fracciones es, en general, conveniente comenzar por reducirlas a la forma entera, para lo cual bastará recordar lo estudiado en §§ 102 y 103. Sin embargo, cuando las ecuaciones son lineales en $1/x$ y $1/y$ es mejor dejarlas en forma fraccionaria, considerando provisionalmente a $1/x$ y $1/y$ como incógnitas (véase el ejemplo 2).

Ejemplos.

1. Resolver el sistema

$$[1] \quad \frac{2x+3y}{3} + 2 = \frac{5x+6y}{5}$$

$$[2] \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + 5 = \frac{3x+y}{2}$$

Multiplicando la ecuación [1] por 15 para suprimir denominadores, se obtiene

$$\begin{aligned} [3] \quad 10x + 15y + 30 &= 15x + 18y \\ \text{ó} \quad 5x + 3y &= 30 \end{aligned}$$

Suprimiendo ahora denominadores en la ecuación [2] resulta:

$$\begin{aligned} [4] \quad 10x + 6y + 150 &= 45x + 15y \\ \text{ó} \quad 35x + 9y &= 150 \end{aligned}$$

El sistema [3]-[4] es equivalente al [1]-[2] y tiene sus

ecuaciones en forma entera. Resolviéndolo por adición y sustracción tendremos:

$$[3] \times 3 \quad 15x + 9y = 90$$

$$[4] \quad 35x + 9y = 150$$

$$[4] - [3] \times 3 \quad 20x = 60$$

de donde

$$x = 3.$$

Introduciendo este valor de x en la ecuación [3] se encuentra

$$15 + 3y = 30$$

$$y = 5.$$

2. Resolver el sistema

$$[5] \quad \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 18$$

$$[6] \quad \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -5$$

Este sistema no es lineal en x e y . Por ejemplo, suprimiendo denominadores en la ecuación [5] se encuentra

$$3y + 4x = 18xy$$

que es una ecuación de segundo grado (a causa del producto xy en el segundo miembro). Sin embargo, considerando por el momento a $1/x$ y $1/y$ como las incógnitas, el sistema es lineal con respecto a ellas y puede resolverse por los métodos ya estudiados. Es preferible, pues, no suprimir los denominadores. Resolviendo por adición y sustracción tendremos:

$$[5] \times 3$$

$$\frac{9}{x} + \frac{12}{y} = 54$$

$$[6] \times 4$$

$$\frac{8}{x} - \frac{12}{y} = -20$$

$$\frac{17}{x} = 34$$

$$\frac{1}{x} = \frac{34}{17} = 2.$$

Por inversión resulta inmediatamente:

$$x = \frac{1}{2}.$$

Sustituyendo este valor de x en [5] se obtiene:

$$6 + \frac{4}{y} = 18$$

$$\frac{4}{y} = 12$$

$$\frac{1}{y} = 3, \quad y = \frac{1}{3}.$$

EJERCICIO 106.

Resolver los sistemas siguientes:

$$1^\circ) \quad \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = \frac{3}{2}$$

$$2^\circ) \quad \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = \frac{17}{6}$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 5$$

$$3^\circ) \quad \frac{x}{3} + \frac{x+y}{2} = 3$$

$$4^\circ) \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = \frac{x+y-1}{3}$$

$$\frac{x-y}{5} + \frac{y}{4} = 1$$

$$\frac{2x-y}{8} - \frac{3}{2} = \frac{x+2y}{2}$$

$$5^\circ) \quad \frac{3x-y}{y-2} = 4$$

$$6^\circ) \quad \frac{x+5y+2}{2x+4y-2} = 2$$

$$\frac{x+2y}{2x-y} = 3$$

$$\frac{x+y+1}{3x+4y-3} = \frac{1}{2}$$

$$7^\circ) \quad \frac{4x+y}{11} = 2x-4y$$

$$8^\circ) \quad \frac{5x+3y}{3} + y = 1$$

$$\frac{3x-y}{13} + y = x-y$$

$$\frac{10x-6y}{4} + x = \frac{1}{5}$$

$$9^{\circ}) \quad \frac{x-3}{2} + \frac{y-2}{4} = x-4$$

$$\frac{x-4}{3} + \frac{y-3}{6} = \frac{x+y-10}{2}$$

$$10^{\circ}) \quad \frac{6+y}{5} - \frac{2+x}{2} = x+y-2$$

$$\frac{3x+2}{4} + \frac{5y+8}{3} = 5x+7y$$

$$11^{\circ}) \quad \frac{2x+y+7}{3} = \frac{3x+2y+5}{4}$$

$$\frac{4x-y+25}{5} = \frac{x+4y-20}{9}$$

$$12^{\circ}) \quad \frac{5x+6}{14} + \frac{2x+y-1}{x+3} = \frac{2,5x+24}{7}$$

$$\frac{3y+5}{26} + \frac{x+2y-6}{y+2} = \frac{1,5y+22}{13} + \frac{1}{2}$$

$$13^{\circ}) \quad \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 23$$

$$14^{\circ}) \quad \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 8$$

$$\frac{4}{x} - \frac{5}{y} = -9$$

$$\frac{7}{x} + \frac{2}{y} = 17$$

$$15^{\circ}) \quad \frac{8}{x} + \frac{3}{y} = 5$$

$$16^{\circ}) \quad \frac{25}{x} - \frac{12}{y} = 3$$

$$\frac{10}{x} - \frac{9}{y} = 2$$

$$\frac{35}{x} - \frac{18}{y} = 4$$

$$17^{\circ}) \quad \frac{3}{4x} + \frac{4}{5y} = 2$$

$$18^{\circ}) \quad \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = -5$$

$$\frac{5}{2x} + \frac{2}{3y} = \frac{25}{6}$$

$$\frac{7}{x} - \frac{5}{y} = -5$$

$$19^{\circ}) \quad \frac{2}{3x} - \frac{3}{4y} = -1$$

$$20^{\circ}) \quad \frac{4}{x} + \frac{3}{5y} = 4,2$$

$$\frac{5}{6x} + \frac{11}{8y} = 8$$

$$\frac{9}{2x} - \frac{6}{y} = 2,5$$

$$21^\circ) \quad 3x + \frac{2}{y} = 12$$

$$22^\circ) \quad \frac{4}{x} - \frac{y}{4} = 1$$

$$2x - \frac{3}{y} = -5$$

$$\frac{6}{x} + \frac{y}{6} = \frac{11}{3}$$

119. Sistemas de ecuaciones con coeficientes literales.

Cuando las ecuaciones de un sistema tienen coeficientes literales se resuelve el sistema por adición y sustracción o por sustitución, siguiendo el mismo procedimiento explicado en § 115 ó § 116 para los sistemas de ecuaciones con coeficientes numéricos.

Consideremos, por ejemplo, el sistema

$$[1] \quad a_1x + b_1y = c_1$$

$$[2] \quad a_2x + b_2y = c_2$$

Los coeficientes de la primera ecuación los hemos representado por a_1 , b_1 y c_1 (léase *a*-subuno, *b*-subuno, etc.). Los de la segunda ecuación por a_2 , b_2 y c_2 (léase *a*-subdos, *b*-subdos, etc.). El número pequeño que se adjunta en la parte inferior derecha de cada letra se llama *subíndice*. Su uso es conveniente cuando se quieren representar por la misma letra los coeficientes de una incógnita en distintas ecuaciones. Se distingue entonces un coeficiente de otro por medio de los subíndices. Así, b_1 representa el coeficiente de y en la primera ecuación y b_2 representa el coeficiente de esta misma incógnita en la segunda ecuación.

Para resolver el sistema [1]-[2] comenzaremos por eliminar y para lo cual multiplicaremos por b_2 la ecuación [1] y por b_1 la ecuación [2]:

$$[3] \quad [1] \times b_2 \quad a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2$$

$$[4] \quad [2] \times b_1 \quad a_2b_1x + b_1b_2y = c_2b_1$$

Restando la [4] de la [3] se obtiene:

$$[5] \quad a_1b_2x - a_2b_1x = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$\text{ó} \quad (a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$$

Suponiendo $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, resulta finalmente,

$$[6] \quad x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Para hallar ahora el valor de y eliminaremos la x , para lo cual comenzaremos por igualar sus coeficientes, multiplicando la [1] por a_2 y la [2] por a_1 :

$$[7] \quad [1] \times a_2 \quad a_1a_2x + a_2b_1y = a_2c_1$$

$$[8] \quad [2] \times a_1 \quad a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2$$

$$[9] \quad [8] - [7] \quad a_1b_2y - a_2b_1y = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$$

En el supuesto $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, se tiene

$$[10] \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas tiene una solución, siempre que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, la cual viene dada por las fórmulas [6] y [10].

¿Qué sucede en el caso $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$?

Si $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$, o bien, $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$, las ecuaciones [5] y [9] demuestran que entonces el sistema es imposible (ya que los primeros miembros de [5] y de [9] serían iguales a cero en tanto que el segundo miembro de [5], o el de [9], o ambos, serían distintos de cero).

Si se tiene $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, $c_1b_2 - c_2b_1 = 0$ y $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$, estas condiciones equivalen a

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

suponiendo distintos de cero los coeficientes de la segunda ecuación, se ve entonces que las ecuaciones son dependientes, es decir, la segunda ecuación equivale a la primera. En efecto, siendo sus coeficientes proporcionales bastaría multiplicar una de ellas por un número apropiado para obtener la otra.

Dejando de lado el caso trivial en que los coeficientes de ambas

incógnitas en una misma ecuación sean ceros, consideremos el caso en que uno de ellos sea cero. Por ejemplo, supongamos $a_2 = 0$, $b_2 \neq 0$.

La condición $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ se reduce a $a_1b_2 = 0$ e implica $a_1 = 0$. El sistema se convierte entonces en un sistema de dos ecuaciones con una sola incógnita, a saber:

$$b_1y = c_1 \quad b_2y = c_2.$$

La segunda ecuación da $y = c_2/b_2$; para que este valor satisfaga también la primera ecuación se necesita

$$b_1 \frac{c_2}{b_2} = c_1 \quad \text{o bien} \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

suponiendo $c_2 \neq 0$; los coeficientes resultan, pues, proporcionales y, por la misma razón de antes, las ecuaciones son equivalentes.

La condición $c_2 = 0$ implicaría $c_1 = 0$ (suponiendo el sistema posible) y las ecuaciones serían también equivalentes.

EJERCICIO 107.

Resolver los sistemas siguientes:

1º) $x + y = m$

$x - y = n$

3º) $ax + by = c$

$2x - 3y = 1$

5º) $ax - by = 2$

$cx + dy = 3$

7º) $2bx + 3ay = 5ab$

$3bx - 4ay = -ab$

9º) $(a - b)x + ay = a^2 - b^2$

$(a + b)x + by = 2ab$

2º) $ax + by = k$

$ax - by = k$

4º) $x + ay = b$

$2x - y = c$

6º) $2x + 5y = a + b$

$5x - 2y = a - b$

8º) $mx + y = n$

$x + my = p$

10º) $bx - (a + b)y = b^2 - a^2$

$ax - by = a^2$

11º) $cx + dy + c^2 + d^2 = 0$

$dx + cy + 2cd = 0$

13º) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c$

$\frac{m}{x} + \frac{n}{y} = p$

12º) $\frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} = 3$

$x + 2y = 4a$

14º) $\frac{a}{c+x} = \frac{c}{a-y}$

$\frac{c}{a-x} = \frac{a}{c+y}$

$$15^{\circ}) \quad \frac{x}{m+n} + \frac{y}{m-n} = \frac{1}{m+n} \quad 16^{\circ}) \quad \frac{1}{a}(3x+y) + \frac{1}{b}(3x-y) = 1$$

$$\frac{x}{m+n} - \frac{y}{m-n} = \frac{1}{m-n} \quad \frac{1}{a}(3x-y) + \frac{1}{b}(3x+y) = 2$$

120. Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, se elimina una incógnita entre dos ecuaciones y luego se elige otro par de ecuaciones y se vuelve a eliminar la misma incógnita. Resulta así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que se resuelve de la manera ya estudiada. Los valores obtenidos para estas dos incógnitas se sustituyen en una cualquiera de las ecuaciones dadas con objeto de determinar el valor de la tercera incógnita.

El método descrito se puede extender a un sistema cualquiera de tantas ecuaciones como incógnitas. Por ejemplo, si se tratase de un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, se procedería a combinar las ecuaciones en pares, eliminando siempre la misma incógnita, hasta reducir el sistema a otro de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Ejemplos.

1. Resolver el sistema

$$\begin{array}{lcl} [1] & 3x + 2y - z & = -4 \\ [2] & 2x + 3y + 4z & = 11 \\ [3] & 5x - 4y - 2z & = 14 \end{array}$$

Comencemos por eliminar la z entre las ecuaciones [1] y [2], para lo cual multiplicaremos por 4 la ecuación [1]:

$$\begin{array}{lcl} [4] & [1] \times 4 & 12x + 8y - 4z = -16 \\ [2] & [2] & 2x + 3y + 4z = 11 \\ [5] & [4] + [2] & 14x + 11y = -5 \end{array}$$

Eliminemos de nuevo la z , ahora entre las ecuaciones [1] y [3] (también se podría haber escogido el par [2], [3]; es preferible, sin embargo, el par [1], [3] pues la eliminación de z entre estas dos ecuaciones es algo más sencilla):

$$[6] \quad [1] \times 2 \quad 6x + 4y - 2z = -8$$

$$[3] \quad [3] \quad 5x - 4y - 2z = 14$$

$$[7] \quad [6] - [3] \quad x + 8y = -22$$

Obtenemos así el sistema [5], [7] que se compone de dos ecuaciones con dos incógnitas. Eliminando la x entre estas dos ecuaciones tendremos:

$$[5] \quad [5] \quad 14x + 11y = -5$$

$$[8] \quad [7] \times 14 \quad 14x + 112y = -308$$

$$[5] - [8] \quad -101y = 303$$

$$y = -3$$

Sustituyendo $y = -3$ en [7]:

$$x + 8(-3) = -22$$

$$x = 2.$$

Sustituyendo ahora $x = 2$, $y = -3$ en [1] resulta:

$$6 - 6 - z = -4$$

$$z = 4.$$

Por tanto, la solución del sistema propuesto es

$$x = 2, \quad y = -3, \quad z = 4.$$

Comprobación. Sustituyendo estos valores en la ecuación [2] se obtiene

$$2[2] + 3(-3) + 4[4] = 11$$

ó

$$4 - 9 + 16 = 11.$$

Método de sustitución. Puede usarse también el método de sustitución para la resolución de los sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas. Tratándose de un sistema lineal, la elimina-

ción por adición y sustracción, en la forma descrita precedentemente es en general más ventajosa en la práctica.

2. Resolver el sistema

$$[1] \quad x + y = 10$$

$$[2] \quad y + z = 16$$

$$[3] \quad z + x = 20$$

Este sistema tiene una forma particularmente sencilla y basta restar las dos primeras ecuaciones miembro a miembro para obtener

$$[4] \quad x - z = -6$$

Las ecuaciones [3] y [4] constituyen ahora un sistema de dos ecuaciones con las incógnitas x, z . Sumando estas ecuaciones resulta

$$2x = 14$$

$$x = 7.$$

Sustituyendo este valor en [3] y en [1] se encuentra $z = 13, y = 3$.

Otro método. Cuando el sistema a resolver presenta alguna forma especial, a menudo puede obtenerse la solución mediante un "artificio de cálculo". Así, en el problema anterior, sumando miembro a miembro las tres ecuaciones del sistema se obtiene

$$[5] \quad 2x + 2y + 2z = 46$$

$$6 \quad x + y + z = 23$$

Si de la ecuación [5] se restan ahora en sucesión las ecuaciones [1], [2], [3] resulta inmediatamente:

$$z = 13, \quad x = 7, \quad y = 3.$$

3. Resolver el sistema

$$[1] \quad \frac{1}{x} - \frac{2}{y} + \frac{5}{z} = 8$$

$$[2] \quad \frac{3}{x} + \frac{6}{y} + \frac{1}{z} = 32$$

$$[3] \quad \frac{2}{x} + \frac{4}{y} - \frac{3}{z} = 14$$

Este sistema es lineal en $1/x$, $1/y$ y $1/z$ por lo que es conveniente dejar las incógnitas en los denominadores (véase el § 118, ejemplo 2).

Eliminando $\frac{1}{x}$ entre las ecuaciones [1] y [2] se tiene:

$$[4] \quad [1] \times 3 \quad \frac{3}{x} - \frac{6}{y} + \frac{15}{z} = 24$$

$$[2] \quad \frac{3}{x} + \frac{6}{y} + \frac{1}{z} = 32$$

$$[4] - [2] \quad -\frac{12}{y} + \frac{14}{z} = -8$$

$$[5] \quad : 2 \quad -\frac{6}{y} + \frac{7}{z} = -4$$

Eliminando $\frac{1}{x}$ entre las ecuaciones [1] y [3] se tiene:

$$[6] \quad [1] \times 2 \quad \frac{2}{x} - \frac{4}{y} + \frac{10}{z} = 16$$

$$[3] \quad \frac{2}{x} + \frac{4}{y} - \frac{3}{z} = 14$$

$$[7] \quad [6] - [3] \quad -\frac{8}{y} + \frac{13}{z} = 2$$

Eliminando ahora $\frac{1}{y}$ entre las ecuaciones [5] y [7]:

$$[8] \quad [5] \times 4 \quad -\frac{24}{y} + \frac{28}{z} = -16$$

$$[9] \quad [7] \times 3 \quad -\frac{24}{y} + \frac{39}{z} = 6$$

$$[9] - [8] \quad \frac{11}{z} = 22$$

$$\frac{1}{z} = 2$$

$$z = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo $z = \frac{1}{2}$ en [5] se obtiene:

$$-\frac{6}{y} + 14 = -4$$

de donde

$$\frac{1}{y} = 3, \quad y = \frac{1}{3}$$

Por último, sustituyendo $y = 1/3$, $z = 1/2$ en [1] resulta:

$$\frac{1}{x} - 6 + 10 = 8$$

de donde

$$\frac{1}{x} = 4, \quad x = \frac{1}{4}$$

Los sistemas de esta forma se pueden también resolver sustituyendo $1/x = x'$, $1/y = y'$, $1/z = z'$ y empezando por buscar los valores de las incógnitas auxiliares x' , y' , z' .

EJERCICIO 108.

Resolver los sistemas siguientes:

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad x + y + z &= 15 \\ x - y + z &= 5 \\ x - y - z &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ) \quad x + 3y + 2z &= 8 \\ 5x - 2y + z &= 15 \\ -3x + 2y + 5z &= -13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^\circ) \quad & 6x - 2y + 3z = -13 \\ & 5x + 3y + 2z = -2 \\ & x - 4y + 6z = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5^\circ) \quad & 2x + 4y - z = -2 \\ & 6x + y + 4z = 15 \\ & 4x - y - 2z = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7^\circ) \quad & 3x = 4y - 6z + 145 \\ & 3y = 2x - 5z + 35 \\ & 3z = x - 8y - 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9^\circ) \quad & x + y = 11 \\ & y + z = 13 \\ & z + x = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11^\circ) \quad & 2x + 3y + 4z = 3 \\ & 4x - 9y + 2z = -0,5 \\ & 3x + 6y - 8z = 1,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13^\circ) \quad & 0,5x - 0,2x + 0,3z = 2,3 \\ & 0,7x + 0,3y - 0,4z = 5,2 \\ & 1,0x - 0,5y - 0,2z = 5,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15^\circ) \quad & x - 2y + 3z = 4 \\ & 2x - 4y + 6z = 5 \\ & x + y + z = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17^\circ) \quad & \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 9 \\ & \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 3 \\ & \frac{x}{6} + \frac{y}{2} - \frac{z}{8} = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19^\circ) \quad & \frac{x+y}{10} - \frac{z}{6} = 2 \\ & \frac{x}{4} + \frac{y+z}{5} = 1 \\ & \frac{y}{6} + \frac{x-z}{5} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^\circ) \quad & 2x + y - 3z = 5 \\ & 4x - 5y + 2z = 19 \\ & 4y + 3z = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6^\circ) \quad & x + y - z = 0 \\ & 2x + 5y + 3z = 210 \\ & 3x - y + 2z = 70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8^\circ) \quad & x + \frac{1}{2}(y+z) = 5 \\ & y + \frac{1}{2}(x+z) = 5 \\ & z + \frac{1}{2}(x+y) = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^\circ) \quad & x - y = 8 \\ & y - z = 10 \\ & z + x = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12^\circ) \quad & 3x + 4y + 6z = 56 \\ & 2x - y + 5z = 29 \\ & 4x + 3y + 4z = 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14^\circ) \quad & 0,7x + 0,4y = 0,15 \\ & 0,5y - 0,3z = 0,01 \\ & 0,6z - 0,5x = 0,13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16^\circ) \quad & 3x + y - 2z = 1 \\ & 6x + 2y - 4z = 2 \\ & 9x + 3y - 6z = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18^\circ) \quad & \frac{x}{5} - \frac{y}{8} - \frac{z}{6} = -2 \\ & \frac{x}{2} + \frac{y}{4} - \frac{z}{3} = 6 \\ & -\frac{x}{4} + \frac{y}{8} + \frac{z}{12} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20^\circ) \quad & \frac{3x}{2} + \frac{4y}{3} + \frac{5z}{4} = 3 \\ & \frac{5x}{4} + \frac{2y}{3} - \frac{5z}{8} = \frac{5}{6} \\ & \frac{x}{20} + \frac{y}{15} + \frac{z}{12} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

$$21^{\circ}) \quad \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 2$$

$$\frac{3}{y} - \frac{2}{z} = 2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{z} = 18$$

$$23^{\circ}) \quad \frac{10}{x} + \frac{8}{y} - \frac{9}{z} = 1$$

$$\frac{15}{x} + \frac{20}{y} + \frac{6}{z} = 10$$

$$\frac{20}{x} - \frac{12}{y} + \frac{15}{z} = 6$$

$$25^{\circ}) \quad \begin{aligned} ax + y - z &= a^2 + a - 1 \\ -x + ay + z &= a^2 - a + 1 \\ x - y + az &= a \end{aligned}$$

$$27^{\circ}) \quad \begin{aligned} ax + by &= 0 \\ bx - cy + az &= b^2 \\ cx - bz &= 2bc \end{aligned}$$

$$29^{\circ}) \quad \begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ y + z + u &= 9 \\ z + u + x &= 8 \\ u + x + y &= 7 \end{aligned}$$

$$22^{\circ}) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 8$$

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = -8$$

$$\frac{5}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 44$$

$$24^{\circ}) \quad \frac{4}{x} + \frac{6}{y} + \frac{7}{z} = 0$$

$$\frac{2}{x} + \frac{9}{y} - \frac{14}{z} = -1,5$$

$$\frac{6}{x} - \frac{3}{y} + \frac{21}{z} = -0,5$$

$$26^{\circ}) \quad \begin{aligned} bx - ay + z &= c \\ x + cy - bz &= a \\ cx + y - az &= b \end{aligned}$$

$$28^{\circ}) \quad \begin{aligned} ax - ay + z &= a^2 \\ 2bx - by + az &= 2ab + b^2 \\ x + y + bz &= a + 2b \end{aligned}$$

$$30^{\circ}) \quad \begin{aligned} x + y + z + u &= 4 \\ x + 2y + 3z + 4u &= 3 \\ 2x + 3y + 5z + 6u &= 9 \\ 3x - 4y + 2z - 3u &= 41. \end{aligned}$$

121. Resolución por el método de los determinantes.

12-1. Consideremos el sistema general de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$[1] \quad a_1x + b_1y = c_1$$

$$[2] \quad a_2x + b_2y = c_2$$

ya resuelto en § 119. Allí vimos que si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ la solución del sistema viene dada por

$$[3] \quad x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Estas expresiones pueden ser utilizadas como fórmulas para

la resolución de los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y coeficientes numéricos.

Nótese que las fracciones en [3] tienen el mismo denominador $a_1b_2 - a_2b_1$. Este denominador común se llama *determinante del sistema* y su forma se recuerda más fácilmente mediante el símbolo

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Se tiene, pues, por definición

$$[4] \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Los símbolos literales a_1 , a_2 , b_1 , b_2 se llaman *elementos* del determinante. A causa de la notación

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

se dice que los elementos a_1 y b_1 constituyen la primera fila del determinante y que los elementos a_2 y b_2 la segunda fila. Análogamente, los elementos a_1 y a_2 forman la primera columna y los elementos b_1 y b_2 forma la segunda columna. Debido a que en el determinante hay dos filas y dos columnas, se dice que es un determinante de *segundo orden*.

Los elementos a_1 y b_2 forman la *diagonal principal* del determinante y los elementos a_2 y b_1 , la *diagonal secundaria*. Dado un determinante en forma simbólica

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

para expresarlo en forma polinómica, o, como también se dice, para desarrollarlo (o evaluarlo, si sus elementos son numéricos), basta restar del producto de los elementos de la diagonal principal el producto de los elementos de la diagonal secundaria, según expresa el esquema

$$\begin{array}{cc} \diagdown & \nearrow \\ a_1 & b_1 \\ \times & \\ a_2 & b_2 \\ \diagup & \searrow \end{array}$$

Así se obtiene $a_1 b_2 - a_2 b_1$, de conformidad con la definición dada en [4].

Ejemplos.

$$\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = mq - np.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 15 - 8 = 7.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 3(-6) = -2 + 18 = 16.$$

Utilizando el simbolismo que acabamos de introducir, se ve que los numeradores de las fórmulas [3] son también determinantes de segundo orden que se expresan de la manera siguiente:

$$c_1 b_2 - c_2 b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$a_1 c_2 - a_2 c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema [1] - [2] se puede expresar en la forma

$$[5] \quad x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

siempre que $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Como vimos en § 119, cuando

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

el sistema propuesto es imposible o indeterminado.

Los determinantes que aparecen en los numeradores de [5] se llaman *determinantes de las incógnitas*.

Nótese que el determinante que figura en los denominadores de [5] (el cual hemos llamado determinante del sistema) se forma con los coeficientes de las incógnitas (tomados en orden), y que los determinantes que aparecen en los numeradores se pueden obtener reemplazando en el determinante del sistema, la columna de los coeficientes de la incógnita respectiva por la columna c_1 de los términos constantes que figuran en los segundos miembros de [1] y [2].

Ejemplo. Resolver por determinantes el sistema

$$2x - 3y = 21$$

$$5x + 2y = 5$$

Aplicando las fórmulas [5] se tiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 21 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{21 \cdot 2 - 5(-3)}{2 \cdot 2 - 5(-3)} = \frac{57}{19} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 21 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot 5 - 5 \cdot 21}{19} = \frac{-95}{19} = -5.$$

EJERCICIO 109.

Desarrollar los determinantes siguientes:

$$1^\circ) \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$2^\circ) \begin{vmatrix} 5 & q \\ -p & 2 \end{vmatrix}$$

$$3^\circ) \begin{vmatrix} A & B \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$4^\circ) \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix}$$

Hallar el valor numérico de los determinantes siguientes:

$$5^{\circ}) \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$6^{\circ}) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$7^{\circ}) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$8^{\circ}) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$$

$$9^{\circ}) \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$10^{\circ}) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$11^{\circ}) \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -6 & -7 \end{vmatrix}$$

$$12^{\circ}) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Resolver por determinantes los siguientes sistemas:

$$13^{\circ}) \begin{cases} 4x + 3y = 17 \\ 2x + 5y = 19 \end{cases}$$

$$14^{\circ}) \begin{cases} 3x - 8y = 20 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$15^{\circ}) \begin{cases} x - 2y = 9 \\ 3x - 4y = 15 \end{cases}$$

$$16^{\circ}) \begin{cases} 2x + 5y = 60 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$17^{\circ}) \begin{cases} 8x + y = 11,5 \\ 6x - 5y = 11,5 \end{cases}$$

$$18^{\circ}) \begin{cases} 10x - 7y = 95 \\ 4x + 9y = -21 \end{cases}$$

$$19^{\circ}) \begin{cases} 0,2x + 0,3y = 0,8 \\ 0,4x - 0,5y = 3,8 \end{cases}$$

$$20^{\circ}) \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1 \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{6}y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

21^{\circ}) Resolver por determinantes los sistemas del ejercicio 104.

121-2. Consideremos ahora un sistema general de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\begin{cases} [1] & a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ [2] & a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ [3] & a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema por el método expuesto en § 120 se encuentra

$$[4] \quad x = \frac{d_1 b_2 c_3 + d_2 b_3 c_1 + d_3 b_1 c_2 - d_3 b_2 c_1 - d_1 b_3 c_2 - d_2 b_1 c_3}{a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3}$$

$$[5] \quad y = \frac{a_1 d_2 c_3 + a_2 d_3 c_1 + a_3 d_1 c_2 - a_3 d_2 c_1 - a_1 d_3 c_2 - a_2 d_1 c_3}{a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3}$$

$$[6] \quad z = \frac{a_1 b_2 d_3 + a_2 b_3 d_1 + a_3 b_1 d_2 - a_3 b_2 d_1 - a_1 b_3 d_2 - a_2 b_1 d_3}{a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3}$$

fórmulas que son válidas siempre que el denominador común sea distinto de cero. Estas fórmulas pueden ser utilizadas para la resolución de los sistemas de la misma forma con coeficientes numéricos.

El polinomio que aparece en el denominador de las tres fracciones anteriores se llama *determinante del sistema* y se representa abreviadamente por la notación

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Se tiene, pues, por definición,

$$[7] \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Puesto que en la expresión simbólica del determinante anterior aparecen tres filas y tres columnas, se dice que es un *determinante de tercer orden*.

Cuando se pasa del primer miembro al segundo miembro de [7] se dice que se *desarrolla* el determinante. En las aplicaciones se presenta este problema: dado un determinante en notación simbólica, desarrollarlo, esto es, expresarlo en forma polinómica, o bien, evaluarlo, cuando sus elementos son numéricos.

Agrupando de dos en dos los términos del polinomio que aparece en el segundo miembro de [7] se puede escribir

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$[8] \quad = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

lo que da una expresión del determinante de tercer orden mediante determinantes de segundo orden (llamados **menores**). Esta expresión es fácil de recordar. Sin embargo, en la práctica es preferible obtener el desarrollo aplicando el método que se indica en el esquema siguiente (regla de Sarrus):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

Como se observa, el método consiste en agregar después de la tercera fila, las dos primeras (conservando su orden relativo) y formar los productos de los elementos que se encuentran sobre la misma flecha, sumando o restando los productos según que las flechas sean descendentes o ascendentes.

Ejemplo. Evaluar el determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Aplicando la regla de Sarrus se tiene:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2(-2)(-1) + 3 \cdot 5 \cdot 1 + (-1)4 \cdot 3 - (-1)(-2) \cdot 1 - 2 \cdot 5 \cdot 3 - 3 \cdot 4(-1) = 4 + 15 - 12 - 2 - 30 + 12 = -13$$

En la práctica los productos indicados se hacen mentalmente.

Comprobación. Aplicando el método indicado en [8] se tendría

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2(-13) - 3(-9) + (-1)[14] = -13.$$

Los polinomios que aparecen en los numeradores de las fórmulas [4], [5] y [6] son también determinantes de tercer orden que se pueden expresar de la manera siguiente:

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Estos determinantes se llaman *determinantes de las incógnitas*. El primero es el determinante de la x , el segundo es el de la y , y el tercero es el de la z . Estos determinantes se obtienen, a partir del determinante del sistema

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

sustituyendo la columna de los coeficientes de la incógnita respectiva por la columna de los términos independientes.

Con esta notación las fórmulas [4], [5] y [6] se expresan de la manera siguiente:

$$[9] \quad x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Nótese que las fórmulas [9] tienen la misma estructura de las fórmulas [5] obtenidas en § 121-1 para los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Fórmulas análogas son también válidas para los sistemas lineales de más de tres ecuaciones con igual número de incógnitas. La regla general, llamada regla de Cramer, puede enunciarse así:

REGLA. Para obtener el valor de una incógnita cualquiera en un sistema lineal de tantas ecuaciones como incógnitas, divídase el determinante correspondiente a esa incógnita por el determinante del sistema.

Se supone que el determinante del sistema sea distinto de cero.

Ejemplo. Resolver por determinantes el sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z &= 9 \\ 3x - 4y + z &= -2 \\ 2x + y + 3z &= 13 \end{aligned}$$

Se tiene

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & 1 \\ 13 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-108 - 8 - 26 + 208 - 12 - 9}{-12 + 12 - 4 + 32 + 18 - 1} = \frac{45}{45} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 13 & 3 \end{vmatrix}}{45} = \frac{-6 + 156 + 18 + 16 - 81 - 13}{45} = \frac{90}{45} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 13 \end{vmatrix}}{45} = \frac{-52 + 27 + 8 + 72 + 78 + 2}{45} = \frac{135}{45} = 3.$$

EJERCICIO 110.

Desarrollar los determinantes siguientes:

$$1^\circ) \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix}$$

$$2^\circ) \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

Hallar el valor numérico de los determinantes siguientes:

$$3^\circ) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$4^\circ) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$5^\circ) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$6^\circ) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$7^\circ) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$8^\circ) \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$9^\circ) \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & -1 \\ -10 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$10^\circ) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Resolver por determinantes los sistemas siguientes:

$$\begin{aligned} 11^\circ) \quad & x + y + z = 3 \\ & 2x - y + 3z = 19 \\ & 3x + y - 2z = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12^\circ) \quad & 2x - y - z = 12 \\ & x + 2y + 3z = -3 \\ & 4x - 3y + 2z = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13^\circ) \quad & 5x + y + 2z = -2 \\ & 3x + 2y + z = 7 \\ & -x + 6y - 3z = 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14^\circ) \quad & x - y + z = 3 \\ & 2y + 3z = 15 \\ & 3x + y = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15^\circ) \quad & 4x + 5y - 6z = 1 \\ & 2x + 3z = 1 \\ & x - y = 0,05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16^\circ) \quad & 3x - y + 4z = 50 \\ & x + 2y + 3z = 47 \\ & 2x - y - z = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}17^\circ) \quad & 5x + 4y - 9z = 14 \\ & -2x + 3y + 5z = -19 \\ & x + y + z = -6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}18^\circ) \quad & 2x + y + 2z = 3 \\ & x + 2y + 6z = 1 \\ & 3x - 3y - 4z = 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}19^\circ) \quad & u + v + w = 12 \\ & 2u + 3v + 4w = 34 \\ & 3u + 2v - w = 20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}20^\circ) \quad & 2p + 3q + r = 1 \\ & 6p - 6q - 5r = 46 \\ & 6p - q - 3r = 29.\end{aligned}$$

122. Problemas.

A continuación damos varios ejemplos de problemas que conducen al planteamiento y resolución de sistemas de dos o más ecuaciones con el mismo número de incógnitas.

No siempre es necesario usar dos o más incógnitas distintas en un problema pero en muchos casos resulta cómodo o conveniente.

En la resolución de estos problemas seguiremos un método análogo al empleado en § 63 y en § 104, separando cuidadosamente las etapas que conviene distinguir en el proceso de resolución, a saber: 1) Representación. 2) Planteo de las ecuaciones. 3) Resolución del sistema de ecuaciones. 4) Verificación de la solución hallada.

Es útil en algunos problemas agregar una figura o gráfico ilustrativo, como hicimos en algunos ejemplos del capítulo 11.

Un problema es imposible o indeterminado cuando conduce a un sistema de ecuaciones que es imposible o indeterminado.

Ejemplos. 1. *El duplo de lo que tiene Antonio más el triple de lo que tiene Luis suma 60 \$. El cuádruplo de lo que tiene Antonio menos el quíntuplo de lo que tiene Luis es igual a 10 \$. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?*

1) Representación.

Designemos por

x el número de pesos que tiene Antonio
y por y el número de pesos que tiene Luis.

2) *Planteo.*

Las dos condiciones que se dan en el enunciado permiten escribir **ii. mediatamente**

$$[1] \quad 2x + 3y = 60$$

$$[2] \quad 4x - 5y = 10$$

3) *Resolución.*

$$[3] \quad [1] \times 2 \quad 4x + 6y = 120$$

$$[4] \quad [2] \times 1 \quad 4x - 5y = 10$$

$$[3] - [4] \quad 11y = 110$$

$$y = 10$$

Sustituyendo $y = 10$ en [1] se obtiene

$$2x + 30 = 60$$

$$2x = 30$$

$$x = 15.$$

Por tanto, Antonio tiene 15 \$ y Luis tiene 10 \$.

4) *Comprobación.*

El cuádruplo de lo que tiene Antonio es $4 \times 15 = 60$ \$

El quíntuplo de lo que tiene Luis es $5 \times 10 = 50$ \$

La diferencia entre estos dos valores es, en efecto, igual a 10 \$.

2. *Un hombre puede remar 20 km río abajo en 2 horas, o bien, 9 km río arriba en 3 horas. Hallar la velocidad con que rema en agua tranquila y la velocidad de la corriente del río.*

1) *Representación.*

Llamemos

x a la velocidad con que rema el hombre en agua tranquila (en km por hora).

e y a la velocidad de la corriente del río (en km por hora).

Recordando que cuando se navega río abajo la velocidad efectiva (con respecto a la orilla) es la suma de las velocidades del bote y del río, y que cuando se navega río arriba la velocidad efectiva es la diferencia de las dos velocidades, tendremos:

	espacio	velocidad	tiempo
río abajo	20	$x + y$	2
río arriba	9	$x - y$	3

2) Planteo.

Como ya dijimos en § 104, ej. 6, en este tipo de problema supondremos siempre que el movimiento es uniforme.* La ley del movimiento uniforme $e = vt$ aplicada al movimiento río abajo proporciona la ecuación

$$[1] \quad 20 = 2(x + y)$$

y aplicada al movimiento río arriba da

$$[2] \quad 9 = 3(x - y)$$

3) Resolución.

Simplificando las ecuaciones [1] y [2] se tiene el sistema sencillísimo

$$[3] \quad x + y = 10$$

$$[4] \quad x - y = 3$$

que resuelto por adición y sustracción da

$$x = 6,5; \quad y = 3,5.$$

Por tanto, en agua tranquila el hombre rema a una velocidad de 6,5 km/h; y la velocidad de la corriente del río es de 3,5 km/h.

* Esta es una hipótesis aproximada que se introduce para hacer más sencillo el problema. Cuando el movimiento se supone variado (no uniforme), hay que dar más datos para especificar la forma en que el movimiento varía. De otro modo el problema sería irresoluble (por falta de datos).

4) **Comprobación.**

La velocidad efectiva del bote navegando río abajo es de $6,5 + 3,5 = 10$ km/h. En 2 horas recorre $2 \times 10 = 20$ km río abajo. Análogamente, la velocidad efectiva río arriba es de $6,5 - 3,5 = 3$ km/h. En 3 horas recorre $3 \times 3 = 9$ km río arriba.

EJERCICIO 111.

1º) La suma de dos números es 10,8 y su diferencia es 4,4. ¿Cuáles son los números?

2º) La diferencia de dos números es $1/6$. El triple del mayor menos el duplo del menor es igual a 1. ¿Cuáles son los números?

3º) Cinco veces lo que tiene A menos tres veces lo que tiene B es igual a 7 \$. Tres veces lo que tiene A más dos veces lo que tiene B es igual a 46 \$. ¿Cuánto tiene cada uno?

4º) La edad de Juan más el duplo de la edad de Pedro suma 65 años. El duplo de la edad de Juan menos la edad de Pedro da 30 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

5º) Una lancha de motor navega río arriba a una velocidad de 21 km por hora y río abajo a una velocidad de 27 km por hora. Hallar la velocidad de la corriente del río y la velocidad de la lancha en agua tranquila.

6º) Un aeroplano vuela a una velocidad de 525 millas por hora a favor del viento y a una velocidad de 495 millas por hora en contra del mismo viento. Hallar la velocidad del viento y la velocidad del aeroplano en aire tranquilo.

7º) Un bote navega 26 km río abajo en 2 horas y 6 km río arriba en 1 hora y 30 minutos. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad de la corriente del río.

8º) Un hombre rema 30 km río abajo en 3 horas. El mismo hombre puede remar 2,5 km río abajo en el mismo tiempo que rema 1,5 km río arriba. Hallar la velocidad con que rema en agua tranquila y la velocidad de la corriente.

9º) Una lancha de motor navega río abajo a una velocidad de 18 millas por hora y tarda doble tiempo en navegar una milla río arriba que en navegar una milla río abajo. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad de la corriente.

10º) Un bote navega 10 km río abajo en 75 minutos y al regreso demora 150 minutos en recorrer la misma distancia. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad de la corriente.

11º) Un aeroplano hace un viaje de 300 millas en 1 hora y 40 minutos si vuela a favor del viento, pero si vuela en contra del mismo viento entonces tarda 2 horas. Hallar la velocidad del aeroplano en aire tranquilo y la velocidad del viento.

12º) Navegando a toda velocidad río arriba una canoa automóvil hace 18 millas por hora. Navegando a media velocidad río abajo hace 15 millas por hora. Hallar la velocidad máxima de la canoa en agua tranquila y la velocidad de la corriente.

13º) Si a la cuarta parte del mayor de dos números se le suma la tercera parte del menor se obtiene 14. Si el duplo del mayor se divide entre el menor, el cociente es 6 y el resto es 8. Hallar los números.

14º) La tercera parte de un número, más la mitad de otro, es 13. Si se divide el primero entre el segundo, el cociente es 2, y el resto es 4. Hallar los números.

15º) En una granja $\frac{2}{3}$ del número de gallinas blancas es igual a $\frac{5}{7}$ del número de gallinas pintadas; $\frac{2}{5}$ del número de gallinas blancas, más 10 gallinas, es igual a la mitad del número de gallinas pintadas. ¿Cuántas gallinas hay de cada clase?

16º) Dos números están en la relación de 5 a 8. Si a cada uno se le suma 6, los nuevos números están entonces en la relación de 2 a 3. Hallar los números primitivos.

17º) Si se suma 4 al numerador y al denominador de un quebrado, la fracción resultante es reducible a $\frac{1}{2}$. Si se resta 2 del numerador y del denominador la fracción resultante es equivalente a $\frac{3}{8}$. ¿Cuál es la fracción original?

18º) En una batalla del Norte de África había 4 tanques italianos por cada 3 tanques ingleses. Durante la batalla los italianos perdieron 20 tanques y los ingleses 10 tanques y quedaron entonces 5 tanques italianos por cada 4 tanques ingleses. ¿Cuántos tanques italianos y cuántos tanques ingleses había al comienzo de la batalla?

19º) La tercera parte de lo que tiene Juan más la cuarta parte de lo que tiene Ramón es igual a 16 \$. Si Juan le diese 4 \$ a Ramón entonces la quinta parte de lo de Juan más la sexta parte de lo de Ramón serían 10 \$. ¿Cuánto tiene cada uno al principio?

20º) La edad de un hijo más la tercera parte de la edad del padre suma 22 años. Dentro de 6 años la edad del padre excederá al duplo de la edad del hijo en 10 años. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

21º) Tres veces la edad de Alicia menos cuatro veces la edad de Ester son 3 años. Hace 4 años el duplo de la edad de Ester excedía en 1 año a la edad de Alicia. ¿Cuál es la edad actual de cada una?

22º) Tomás y Pedro juegan entre sí. Al comenzar el juego la tercera parte del dinero de Pedro excede en 4 \$ a la cuarta parte del dinero de Tomás. Al terminar el juego Tomás ha perdido 30 \$ y entonces el duplo de lo que le queda a Tomás, más 2 \$, es lo que tiene Pedro. ¿Cuánto tenía cada uno al principio?

23º) Se reparten 80 monedas entre 3 niños y 4 niñas. Cada niño recibe igual número de monedas, y las niñas otro número, igual para cada una de ellas.

Si ese reparto se hubiere hecho entre 2 niños y 5 niñas, se hubiesen necesitado 86 monedas. ¿Cuántas monedas correspondió a cada niño? ¿Cuántas a cada niña?

24º) El empresario de un cine resuelve contribuir a una obra benéfica con 60 centavos por cada entrada de mayores y con 40 por las de niños. Asisten 250 personas y el importe que dona es de 128 pesos. ¿A cuántas entradas de mayores y cuántas de niños corresponden?

25º) Con el mismo fin, otro empresario contribuyó con parte del importe de las entradas de varias funciones. En la primera función, entraron 144 mayores y 240 niños, y se reunieron 264 \$; en la segunda función entraron 180 mayores y 150 niños, y se alcanzó a 255 \$. ¿Con cuánto contribuyó por entrada de mayor y con cuánto por la de niño?

26º) Cuarenta y una monedas, de 5 y 10 centavos suman 2,95 \$. Hallar cuántas hay de cada clase.

27º) La diferencia entre la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número de dos cifras es 1. El número aumentado en 6 es igual a 7 veces la suma de las cifras. Hallar el número.

28º) La suma de las cifras de un número de dos cifras es 8. Si al número se añaden 18 el número resultante está formado de las mismas cifras en orden inverso. Hallar el número primitivo.

29º) En un número de dos cifras el triple de las decenas más el duplo de las unidades es 16. Si el número se divide entre la suma de los valores absolutos de sus cifras el cociente es 3 y el residuo es 4. ¿Cuál es el número?

30º) La distancia entre A y B es de 500 km. Un móvil parte de A hacia B, con velocidad constante, al mismo tiempo que otro sale de B hacia A, también con velocidad constante, y tardan 5 horas en encontrarse. Si el segundo móvil saliese de B en dirección opuesta a A, el primero tardaría 25 horas en alcanzarlo. ¿Cuál es la velocidad de cada uno?

31º) Dos muchachos están a 100 metros de distancia. Si corren en sentido opuesto, uno hacia el otro, se encuentran en 10 segundos, pero si corren en el mismo sentido el más rápido alcanza al otro en 50 segundos. Hallar la velocidad de cada uno.

32º) Una sociedad científica invirtió cierta suma de dinero al 5 % para instituir, con el interés de esta suma, un premio anual. La tasa del interés fué reducida al 4 % y entonces la sociedad tuvo que incrementar el capital invertido en 750 \$ para poder mantener el mismo premio. ¿A cuánto ascendía el premio?

33º) ¿Cuántas libras de plomo y cuántas de cobre puro se deben agregar a 200 libras de una aleación que contiene 20 % de plomo y 30 % de cobre para obtener una aleación que contenga 25 % de plomo y 50 % de cobre?

34º) Dividir el número m en dos partes que estén entre sí como p es a q .

35º) Dos máquinas de imprenta trabajando juntas pueden imprimir un libro en 20 horas. A las 15 horas una de ellas se rompe y entonces tarda

la otra 9 horas más en terminar el trabajo. ¿Cuántas horas necesitaría cada máquina para imprimir ella sola el libro?

36º) Para un experimento necesitamos 18 gramos, en total, de dos productos, y los pagamos 5,80 \$. Uno de ellos cuesta 0,30 \$ el gramo y el otro 0,35 \$. ¿Cuántos gramos hemos comprado de cada uno?

37º) Un granjero desea cercar un lote rectangular de terreno. Si usa un material que cuesta 2,40 \$ por vara para el frente del lote y un material que cuesta 2,10 \$ por vara para los otros tres lados, la cerca le cuesta 589,50 \$. Si usa el material más caro para los cuatro lados la cerca le cuesta 648 \$. ¿Cuáles son las dimensiones del lote?

38º) Dos nadadores A y B se entrenan para una competencia de relevo en una piscina de 30 metros de largo. A nada 2 largos y le sigue B que nada también 2 largos y lo hacen en un tiempo total de 76 segundos. Si A nada 1 largo y B 3 largos, entonces lo hacen en 74 segundos. Hallar la velocidad de cada uno.

39º) Dos corredores se entrenan en una pista circular que tiene 180 metros de circunferencia. Cuando corren en sentidos opuestos se encuentran cada 15 segundos. Cuando corren en el mismo sentido el más rápido alcanza al otro cada 90 segundos. Hallar la velocidad de cada uno.

40º) Cierta día la velocidad del viento era de 40 millas por hora a 2 000 pies de altura y de 25 millas por hora (en el mismo sentido) a 6 000 pies de altura. Un aeroplano voló cierta distancia a 2 000 pies de altura en 4 horas y regreso a 6 000 pies de altura en 5 horas. Hallar la velocidad del aeroplano en aire tranquilo y la distancia que voló en el viaje de ida.

3. *La suma de las edades de una señora, su esposo y su hija es de 84 años. La quinta parte de la edad de la hija es igual a la diferencia entre las edades del padre y de la madre. La suma de las edades de la madre y la hija es igual a $\frac{4}{3}$ de la edad del padre. ¿Cuál es la edad de cada persona?*

1) Representación.

Sea

x = edad de la esposa (en años),

y = edad del esposo,

z = edad de la hija.

2) Planteo.

Según la primera condición del enunciado, se tiene

$$[1] \quad x + y + z = 84$$

De acuerdo con la segunda condición, se tiene

$$\frac{z}{5} = y - x$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por 5 y transponiendo, resulta:

$$[2] \quad 5x - 5y + z = 0$$

Por último, la tercera condición del enunciado expresa

$$x + z = \frac{4}{3}y$$

Multiplicando ambos miembros por 3 y transponiendo se encuentra

$$[3] \quad 3x - 4y + 3z = 0$$

El problema propuesto conduce, pues, al sistema [1]-[2]-[3] de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

3) Resolución.

Aplicando el método estudiado en § 120 tendremos:

$$\begin{array}{rcl}
 [4] \quad [1] & x + y + z & = 84 \\
 [2] & 5x - 5y + z & = 0 \\
 \hline
 [1] - [2] & -4x + 6y & = 84 \\
 [4] : 2 & -2x + 3y & = 42
 \end{array}$$

Eliminando ahora z entre las ecuaciones [1] y [3]:

$$\begin{array}{rcl}
 [5] \quad [1] \times 3 & 3x + 3y + 3z & = 252 \\
 [3] \quad [3] \times 1 & 3x - 4y + 3z & = 0 \\
 \hline
 [6] \quad [5] - [3] & 7y & = 252 \\
 & y & = 36
 \end{array}$$

Como la ecuación [6] solamente contiene la incógnita y , su valor se obtiene inmediatamente. Sustituyendo $y = 36$ en [4] resulta

$$-2x + 3(36) = 42$$

$$-2x = -66$$

$$x = 33.$$

Sustituyendo ahora $x = 33$, $y = 36$ en [1] se halla

$$33 + 36 + z = 84$$

$$z = 15.$$

Por consiguiente, la esposa tiene 33 años, el esposo 36 años y la hija 15 años.

4) *Comprobación.*

La quinta parte de la edad de la hija es 3 años y la diferencia de edades de sus padres es también 3 años.

Por otra parte, la suma de las edades de la madre y la hija es 48 años, que es igual a $\frac{4}{3}$ de la edad del padre ($\frac{4}{3}$ de $36 = 48$).

4. La suma de los valores absolutos de las tres cifras de un número es 14. La cifra de las decenas es igual a la suma de las cifras de las centenas y unidades. Si del número se restan 99 se obtiene otro número que se compone de las mismas cifras, pero en orden inverso. ¿Cuál es el número original?

1) *Representación.*

Si la cifra de las centenas del número buscado se representa por x , la cifra de las decenas por y , y la cifra de las unidades por z , la representación polinómica del número será, teniendo en cuenta el valor relativo de las cifras, $100x + 10y + z$. Tenemos, pues,

Cifra de las centenas	x
Cifra de las decenas	y
Cifra de las unidades	z
El número	$100x + 10y + z$
El número con las cifras en orden inverso	$100z + 10y + x$

2) *Planteo.*

La primera condición del enunciado conduce a la ecuación

[1] $x + y + z = 14$

La segunda condición da

$$[2] \quad y = x + z$$

o bien,

$$x - y + z = 0$$

Según la tercera condición tenemos

$$100x + 10y + z - 99 = 100z + 10y + x.$$

Transponiendo y reduciendo términos semejantes resulta

$$[3] \quad 99x - 99z = 99$$

$$x - z = 1$$

3) *Resolución.*

Hemos obtenido así el sistema

$$[1] \quad x + y + z = 14$$

$$[2] \quad x - y + z = 0$$

$$[3] \quad x - z = 1$$

que es de una forma relativamente sencilla. Restando las dos primeras ecuaciones se encuentra inmediatamente

$$2y = 14, \quad \text{de donde,} \quad y = 7.$$

Sumando ahora las dos primeras ecuaciones se obtiene

$$2x + 2z = 14$$

$$\text{ó} \quad x + z = 7$$

$$\text{y como la [3] es} \quad x - z = 1$$

sumando y restando resulta

$$x = 4, \quad z = 3.$$

Por tanto, el número buscado es 473.

4) *Comprobación.*

$$\text{Suma de las cifras: } 4 + 7 + 3 = 14$$

$$\text{Cifra de las decenas: } 7 = 4 + 3 \text{ (centenas + unidades)}$$

$$\text{Además: } 473 - 99 = 374.$$

EJERCICIO 112.

1º) La suma de tres números es 13. El triple del menor más el mediano excede en 5 al duplo del mayor. El triple del mayor más el duplo del menor excede en 4 a cuatro veces el mediano. Hallar los números.

2º) La suma de tres números es 36. El mayor más el duplo del mediano más el triple del menor suma 58. El duplo del mayor más el triple del mediano menos el quíntuplo del menor es igual a 40. ¿Cuáles son los números?

3º) La suma de las edades de Manuel, Pedro y Julián es 44 años. La suma de las edades de Manuel y Pedro excede en 10 años a la edad de Julián. La suma de las edades de Manuel y Julián es un año menos que el duplo de la edad de Pedro. ¿Cuál es la edad de cada uno?

4º) A, B y C tienen 52 \$ entre los tres. Lo que tiene C es $\frac{3}{10}$ de lo que tienen A y B conjuntamente. Si B le diese 5 \$ a A entonces A y B tendrían la misma cantidad. ¿Cuánto tiene cada uno?

5º) En una hora, una lancha, un automóvil y una avioneta recorrieron 510 km. Si la lancha corre 2 horas, el automóvil 3 y la avioneta 2, hacen en total 1 170 km. Si la lancha corre 6 horas, el auto 2, y la avioneta 5, hacen 2 160 km. ¿Cuál es la velocidad de cada uno?

6º) La suma de las edades de tres hermanos es 35 años. El mayor tiene dos veces la edad del menor y el triple de la edad del mediano excede en 1 al duplo de la edad del mayor. ¿Cuál es la edad de cada uno?

7º) La suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es 180° . En cierto triángulo el ángulo mayor es igual a la suma del mediano y del duplo del menor; y el mediano es igual a la semisuma de los otros dos. ¿Cuánto vale cada uno?

8º) Una parte de un capital de 20 000 \$ está invertida al 3 %, otra parte al 4 % y otra al 5 %, lo que produce en total un interés de 750 \$. Las inversiones al 4 % y al 5 % producen entre ambas 210 \$ más que la inversión al 3 %. ¿A cuánto ascienden las cantidades invertidas al 3 %, 4 % y 5 % respectivamente?

9º) Tengo 60 monedas, de las cuales unas son de 5 centavos, otras de 10, y las restantes de 20, con un valor total de 7,25 \$. Si las de 5 centavos fueran de 10, las de 10 fueran de 20, y las de 20 fueran de 5, su valor total sería de 7,50 \$. ¿Cuántas monedas tengo de cada clase?

10º) Entre A, B y C tienen 210 \$. Si A da 10 \$ a B y B 30 \$ a C los tres tienen entonces la misma cantidad. ¿Cuánto tiene cada uno?

11º) A y B pueden hacer un trabajo en 3 días $\frac{3}{7}$; B y C pueden hacer el mismo trabajo en 4 días $\frac{4}{9}$; y A y C, en 3 días $\frac{3}{4}$. ¿Cuánto tiempo tardará cada uno trabajando solo?

12º) La suma de las tres cifras de un número es 12. La suma de las cifras de las centenas y decenas excede en dos a la cifra de las unidades. Si al número se suma 198 el nuevo número tiene las mismas cifras en orden inverso. ¿Cuál es el número?

13º) La suma de las tres cifras de un número es 15. El triple de las unidades más la cifra de las decenas excede en 1 a la cifra de las centenas. Si al número se resta 45 el nuevo número tiene las mismas cifras del número primitivo exceptuando el orden de las decenas y unidades, las cuales aparecen intercambiadas. Averiguar cuál es el número primitivo.

14º) La suma de las tres cifras de un número es 13. Si el número de dos cifras formado por las decenas y unidades se divide por la cifra de las centenas el cociente es 6 y el resto es 0. Si del número se resta 270 resultan intercambiadas las cifras de las centenas y decenas pero se conserva la cifra de las unidades. ¿Cuál es el número?

15º) En un número de tres cifras la cifra de las centenas es igual a la suma de las cifras de las decenas y unidades. El duplo de las centenas es igual al triple de las decenas. Si el número se divide por el número de dos cifras formado por sus decenas y unidades el cociente es 15 y el resto es 18. ¿Cuál es el número?

16º) La suma de las tres cifras de un número es 9. El número no varía porque se escriban sus cifras en orden inverso, y si se le suma 27 se intercambian las cifras de las decenas y unidades. Hallar el número.

17º) Un tanque tiene tres llaves de agua. Si se abren las llaves A y B, el tanque se llena en 6 horas; si se abren las llaves B y C, se llena en 8 horas; y si se abren las llaves A y C, se llena en 4 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará el tanque por cada una de las llaves abiertas separadamente?

18º) Tres jugadores A, B, C, convienen en que el perdedor duplicará el dinero de los otros dos. Juegan tres partidos. A pierde el primer partido; B pierde el segundo; y C, el tercero. Si cada jugador finaliza con 16 \$, ¿cuánto tenía cada uno al comienzo del juego?

19º) La dieta de un individuo se compone de 5 onzas de proteína, 2 onzas de grasa y 18 onzas de carbohidratos, y consiste en leche, cereal y huevo. Si la leche tiene 3 % de proteínas, 4 % de grasa y 5 % de carbohidratos, el cereal tiene 14 % de proteína, 2 % de grasa y 72 % de carbohidratos, y el huevo tiene 15 % de proteína y 10 % de grasa, hallar las onzas que debe tomar diariamente de cada alimento. (1 onza = 28,35 gramos; pero conviene resolver el problema en onzas y fracción decimal).

EJERCICIO 113. (REPASO).

Resolver algebraicamente los sistemas siguientes:

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad 3x - y &= 10 \\ x + 3y &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ) \quad -4x + 3y &= 27 \\ 2x + 5y &= 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^\circ) \quad 7x + 4y &= 80 \\ 5x - 6y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^\circ) \quad 3u + 8v &= -1 \\ 6u - 6v &= 3,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5^\circ) \quad 0,6x - 0,5y &= -0,5 \\ 0,9x + 0,4y &= 7,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6^\circ) \quad 0,25x + 0,17y &= 0,101 \\ 0,20x - 0,09y &= 0,013 \end{aligned}$$

$$7^{\circ}) \quad \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 9$$

$$8^{\circ}) \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = -4$$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{9} = 3$$

$$\frac{x}{6} - \frac{y}{7} = 7$$

$$9^{\circ}) \quad \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 3$$

$$10^{\circ}) \quad \frac{2x+y}{5} + \frac{2x+3y}{6} = 6$$

$$\frac{x+2y}{3} - \frac{x-2y}{4} = 3$$

$$\frac{3x-y}{10} + \frac{x-3y}{6} = 8$$

$$11^{\circ}) \quad \frac{x-3}{3} + \frac{y-3}{4} = \frac{x+y-1}{6}$$

$$12^{\circ}) \quad \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 5$$

$$\frac{2x+3}{5} + \frac{3y+3}{8} = \frac{4x+y+5}{6}$$

$$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 27$$

$$13^{\circ}) \quad \frac{2}{3x} + \frac{3}{4y} = 7$$

$$14^{\circ}) \quad 3x + \frac{4}{y} = 35$$

$$\frac{5}{3x} - \frac{1}{2y} = 8$$

$$5x - \frac{6}{y} = -5$$

$$15^{\circ}) \quad x + y = 2b$$

$$16^{\circ}) \quad \frac{ax}{a^2+b^2} + \frac{by}{a^2+b^2} = 1$$

$$\frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} = \frac{4ab}{a^2-b^2}$$

$$\frac{bx}{a+b} - \frac{ay}{a-b} = \frac{2ab^2}{b^2-a^2}$$

Resolver gráficamente los siguientes:

$$17^{\circ}) \quad \begin{aligned} 2x - y &= 6 \\ 3x + y &= 14 \end{aligned}$$

$$18^{\circ}) \quad \begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x - y &= 7 \end{aligned}$$

$$19^{\circ}) \quad \begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ x - y &= -5 \end{aligned}$$

$$20^{\circ}) \quad \begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ 4x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

21°) Si 5 piezas de cobre y 4 de níquel pesan 15 kg; 7 de cobre y 5 de níquel pesan 20,1 kg. ¿Cuánto pesa la pieza de cada metal?

22°) Si la longitud de un rectángulo fuese 9 metros más corta y la anchura fuese 6 metros más larga, la figura sería un cuadrado con la misma área que el rectángulo. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

23°) Un capitalista tiene invertida cierta cantidad de dinero al 5 % y

otra cantidad al 6 %, lo cual le produce en total un interés anual de 5 850 \$. Si la primera cantidad estuviese invertida al 6 % y la segunda al 5 % el interés total anual sería de 150 \$ menos. ¿Cuánto tiene invertido al 5 % y cuanto al 6 %?

249) El equipo de pelota de un Instituto se compone de 20 jugadores entre regulares y suplentes. Para competir con otro club, una parte del equipo se trasladó en ómnibus y el resto en automóvil. Los que fueron en ómnibus pagaron 1,60 \$ cada uno y los que fueron en automóvil 1,80 \$ cada uno. Si en total el viaje costó 33,80 \$, ¿cuántos fueron en ómnibus y cuántos en automóvil?

259) Un tanque contiene una mezcla de alcohol y agua. Si se añaden 8 litros de alcohol la mezcla contendrá 90 % de alcohol, pero si se añaden 8 litros de agua la mezcla contendrá 75 % de alcohol. Hallar las cantidades de alcohol y de agua que hay en la mezcla primitiva, en galones y fracción.

269) Un ómnibus hace normalmente el viaje de A a B en $2\frac{1}{2}$ horas. Aumentando su velocidad en 8 km/h podría hacer el viaje en $2\frac{1}{4}$ horas. Hallar la distancia de A a B y la velocidad usual del ómnibus.

279) Un número de dos cifras es igual a 7 veces la suma de los valores absolutos de sus cifras. Si se invierte el orden de sus cifras el número resulta disminuido en 27. ¿Cuál es el número?

289) Una lancha puede viajar 40 km río arriba y regresar en 9 horas. La misma lancha puede viajar 32 km río abajo y hacer la mitad del viaje de regreso en 5 horas y 12 minutos. Hallar la velocidad de la lancha en agua tranquila y la velocidad de la corriente. [Si x e y son las incógnitas, comiencese por determinar los valores de las incógnitas auxiliares $x + y = x'$, $x - y = y'$.]

299) Una compañía naviera concede un número fijo de horas de licencia por los 20 primeros días de navegación corridos, y un cierto número de horas por cada día adicional en exceso. Si por un viaje de 25 días se dieron 90 h de licencia y por uno de 40 días. 180 h, hallar el fijo por los primeros 20 días y el adicional por día.

309) Un automóvil recorre un camino AB compuesto de subidas, bajadas y tramos horizontales. En la subida su velocidad es de 60 km/h; en las bajadas, de 80 km/h; y en los tramos horizontales, de 70 km/h. Si el automóvil tarda 9 horas en ir de A a B y 8 horas 40 minutos en el regreso de B a A, hallar la longitud total de las subidas y la longitud total de las bajadas (de A hacia B) sabiendo que los tramos horizontales suman en total 210 km.

Resolver los sistemas siguientes:

$$319) \quad 5x - 3y + 2z = 5$$

$$3x + 4y - 3z = 2$$

$$2x + 3y - 2z = 2$$

$$329) \quad 2x - 3y + 4z = 9$$

$$4x + 5y - 3z = -4$$

$$6x + y + 6z = 3$$

33º) $3x + y = 20$

$x + 2z = 26$

$3y + z = -22$

34º) $8u - 3v + 4w = 1$

$5u + 2v - w = 7$

$2u + 3v + 6w = 19$

35º) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 9$

36º) $\frac{4}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 12$

$\frac{x}{3} - \frac{y}{9} + \frac{z}{3} = 6$

$-\frac{3}{x} + \frac{5}{y} + \frac{3}{z} = -13$

$\frac{x}{6} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 13$

$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = -2$

37º) $-x + 2y - 2z = a$

38º) $2x + 2y - z = 2a$

$2x + y - z = 3a$

$3x - y - z = 4b$

$3x + y + 3z = 4b$

$4x + 3y - 3z = a + b$

39º) $ax + cy - bz = a^2$

40º) $x + 2y + 3z - 4u = 16$

$cx - by + az = 2ac - b^2$

$2x + z = 10$

$bx + ay + cz = 2ab + c^2$

$4y + 2z + u = 25$

$4x + 3y - 5z = 21$

41º) La cilindrada de las motocicletas de Carlos, Luis y Raúl suma 1225 cm^3 . La moto de Raúl es de 175 cm^3 más que la de las otras dos motos juntas. Sumada la cilindrada de las de Carlos y Raúl, excede en 25 cm^3 al doble de la otra. ¿Cuál es la cilindrada de cada una?

42º) Las edades combinadas de un padre y sus dos hijos suman 73 años. Dentro de 10 años la edad del padre será el duplo de la edad del hijo menor. Hace 12 años la edad del hijo mayor era el doble de la edad de su hermano. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

43º) En una caja registradora hay 355 \$ en billetes de 1, 5 y 10 \$. El número total de billetes es 58 y el número de billetes de 1 \$ es $\frac{5}{6}$ del número de billetes de 5 \$. ¿Cuántos billetes hay de cada denominación?

44º) Entre A, B y C tienen 630 \$. Si A tuviese 10 \$ menos, B 10 \$ más y C diez veces lo que tiene, los tres tendrían el mismo dinero. ¿Cuánto tiene cada uno?

45º) En un corral hay ovejas, vacas y caballos en un total de 54 animales. Sabiendo que el número de vacas representa los $\frac{3}{4}$ del número de ovejas, y el de caballos los $\frac{2}{3}$ del de las vacas, ¿cuántos animales de cada clase hay en el corral?

46º) Se tienen tres aleaciones de plomo, cobre y zinc las cuales contienen estos metales en distintas proporciones (en peso), como muestra el cuadro siguiente:

	1ª aleación	2ª aleación	3ª aleación
plomo	30 %	60 %	40 %
cobre	20 %	25 %	30 %
zinc	50 %	15 %	30 %

¿Cuántos gramos deben tomarse de cada una de estas aleaciones para obtener una nueva aleación que contenga 170 g de plomo, 85 g de cobre y 95 g de zinc?

47º) Se clasifican 260 fichas de cartulina en 30 casilleros, divididos en tres grupos. A cada casillero del primer grupo corresponden 20 fichas, a los del segundo grupo 10, y a los del tercero 5. Si en los casilleros del primer grupo hay tantas fichas como en los del tercero, ¿de cuántos casilleros se compone cada grupo?

48º) La fórmula $h = a + bt + ct^2$ da la relación entre la temperatura t en grados centígrados a que hierve el agua y la altura h sobre el nivel del mar. Si para $t = 100$ es $h = 0$, para $t = 99$ es $h = 1500$ y para $t = 98$ es $h = 2994$, hallar los valores de las constantes a , b y c en la fórmula anterior.

49º) La suma de las tres cifras de un número es 14. La cifra de las unidades es igual a la suma de las cifras de las decenas y centenas. Si al número se suma 270 resultan invertidas las cifras de las decenas y centenas. ¿Cuál es el número?

50º) La suma de los valores absolutos de las cifras de un número de cuatro cifras es 21. La cifra de los millares más la cifra de las decenas es igual a la cifra de las unidades. La cifra de los millares más la cifra de las centenas es igual al duplo de la cifra de las decenas. Si al número se suma 4635 resulta un nuevo número con las mismas cifras pero en orden inverso. ¿Cuál es el número?

Hallar el valor numérico de los determinantes siguientes:

$$51^\circ) \begin{vmatrix} 8 & 15 \\ 7 & 17 \end{vmatrix}$$

$$52^\circ) \begin{vmatrix} 6 & 11 \\ -5 & 12 \end{vmatrix}$$

$$53^\circ) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$54^\circ) \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollar los determinantes siguientes:

$$55^\circ) \begin{vmatrix} 0 & b & b \\ b & a & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}$$

$$56^\circ) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Resolver por determinantes los sistemas siguientes:

$$57^\circ) \begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 7x - 2y = 66 \end{cases}$$

$$58^\circ) \begin{cases} 6x - 5y = 2,5 \\ 8x + 10y = 5 \end{cases}$$

59º) $2x - 5y + 2z = -2$

$3x + y - 4z = 14$

$x + 8y - 3z = 20$

60º) $x + 2y + 3z = 24$

$2x - 5y + 4z = 16$

$3x + y + 2z = 13.$

TEST 13.

1º) Resolver gráficamente el sistema

$2x - y = 10$

$x + 3y = -2.$

2º) Decir si el sistema siguiente es posible o no, e ilustrar la respuesta gráficamente:

$2x - 3y = 6$

$-4x + 6y = 24.$

3º) Resolver algebraicamente el sistema:

$$\frac{x+2}{4} + \frac{y+1}{3} = x + y - 7$$

$$\frac{x-y}{2} + \frac{y+4}{3} = \frac{x+2y-2}{4}$$

4º) Resolver el sistema

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 35$$

$$\frac{6}{x} + \frac{2}{y} = 42.$$

5º) Resolver el sistema

$$ax + by = ab$$

$$(a+b)x + (a-b)y = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

6º) Decir si $x=3$, $y=2$, $z=1$ es solución o no del sistema

$$x + y + 2z = 7$$

$$2x - y + z = 5$$

$$3x + y + 3z = 10.$$

79) Resolver el sistema

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 9$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} - \frac{z}{5} = 2$$

$$\frac{x}{6} - \frac{y}{9} + \frac{z}{4} = 2,5.$$

89) Un aeroplano hace un vuelo de 1 200 km en 3 horas si vuela a favor del viento. Volando en contra del mismo viento tardaría 3 horas y 20 minutos en recorrer igual distancia. Hallar la velocidad del aeroplano en aire tranquilo y la velocidad del viento.

99) Entre A, B y C tienen 200 \$. Si B diese 20 \$ a C ambos tendrían lo mismo y A tendría entonces el doble que uno cualquiera de ellos. ¿Cuánto tiene cada uno?

109) En un espectáculo pagan su entrada 400 mayores y 150 niños y se recauda 3 950 \$. Al día siguiente entran 500 mayores y 180 niños y se recauda 4 900 \$. ¿Cuáles son los precios de las entradas?

EJERCICIOS DE REPASO de los capítulos 11 á 13.

1º) Resolver: $\frac{x+8}{6} + \frac{x^2+21}{1-12x} = \frac{26+x}{12}$.

2º) Resolver: $\frac{x^3+2b^3}{x+b} + 2bx = \frac{x^3-2b^3}{x-b} + \frac{b^3}{x^2-b^2}$.

3º) En la fórmula $L = \pi(R+r) + 2d$ despejar r . Hallar el valor de r cuando $R = 7$ dm, $L = 5,54$ m, $d = 12$ dm ($\pi = 3,14$).

4º) Dos lanchas de motor entablan una competencia desde un muelle hasta una boya y regreso. Una de las lanchas hace 12 millas por hora a la ida, pero solamente 8 millas por hora al regreso. La otra mantiene una velocidad constante de 10 millas por hora (tanto a la ida como al regreso) y gana la competencia por una diferencia de 18 segundos. ¿Cuál es la distancia entre el muelle y la boya?

5º) Un barco navega 16 millas por hora en agua tranquila. Si el barco puede hacer 80 millas a favor de la corriente en el mismo tiempo que hace 48 millas en contra de la corriente, ¿cuál es la velocidad de ésta?

6º) A puede hacer un trabajo en a días y B en b días. A trabaja cierto número de días y es sustituido por B que concluye la obra. Entre los dos han demorado m días. ¿Cuántos días trabajó cada uno?

7º) Dado $f(x) = \frac{x}{x+3}$, hallar: a) $f(-1)$, b) $f(2)$, c) $f(0)$.

8º) La altura de un cono es tres veces el diámetro de su base. Expresar el volumen del cono en función del radio r de la base.

9º) La presión del agua sobre una superficie es directamente proporcional a la profundidad a que esté sumergida. Si la presión sobre cada cm^2 del traje de un buzo es de 0,52 kg a 5 m de profundidad, ¿a qué profundidad podrá descender sin peligro si el traje soporta una presión de 2,6 kg por cm^2 ?

10º) Constrúyase el gráfico de cada una de las funciones siguientes:

a) $y = \frac{10}{x}$

b) $y = 0,5x^2$

11º) Estudiar la proporcionalidad entre los elementos de la fórmula

$$S = \frac{d^2 w}{8p}.$$

12º) En el análisis de 1 000 gramos de una muestra de leche se encontró lo siguiente:

Agua	870 g	Carbohidratos	50 g
Proteínas	33 g	Minerales	7 g
Grasas	40 g		

Representar el resultado del análisis mediante un gráfico circular.

13º) Resolver el sistema:

$$\frac{x-y}{4} + \frac{x-2y}{3} = y+1$$

$$\frac{3x+1}{2} - \frac{4y+1}{5} = x+y+1$$

14º) Resolver el sistema:

$$ax + by = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

$$(a+b)x + (a-b)y = 2$$

15º) Resolver gráficamente el sistema:

$$3x + 5y = 9$$

$$y - x = 5$$

16º) Resolver el sistema:

$$\frac{1}{5x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{z} = 4$$

$$\frac{1}{4x} - \frac{1}{6y} + \frac{1}{2z} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{4z} = \frac{9}{2}$$

17º) Resolver el sistema:

$$x + y + z = 0$$

$$(a+b)x + (b+c)y + (a+c)z = 0$$

$$abx + bcy + acz = 1$$

18º) Resolver por determinantes el sistema:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 8 \\ 4x - y - 5z &= -12 \\ -3x + 2y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

19º) Tres recipientes contienen, respectivamente, 15, 25 y 30 litros de alcohol de distinta concentración. Si el contenido de los dos primeros recipientes se juntase la solución resultante contendría 47,5 % de alcohol. Si se juntase el contenido del primer recipiente con el del tercero, la solución contendría 25 % de alcohol. Análogamente, mezclando el contenido de los recipientes segundo y tercero resultaría una solución con el 22,5 % de alcohol. Hallar el tanto por ciento de alcohol de cada uno de los recipientes.

20º) Un metalúrgico quiere hacer una aleación con 6 partes (en peso) de plomo, 5 partes de estaño y 3 de bismuto. El único plomo que tiene en existencia se halla en una aleación que contiene 8 partes de plomo, 5 de estaño y 2 de bismuto. ¿Cuánto debe tomar de esta aleación y qué cantidades debe añadir de estaño y de bismuto para hacer 280 kg de la primera aleación?

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS.

EJERCICIO 1.

2º) A: 2 B: 3,6 C: 5 D: 5,5 E: 6,8

3º) $5 - (0,1)^n$, $5 + \frac{1}{n}$, $5 - \frac{1}{n^2}$, etc. ($n = 1, 2, \dots$)

EJERCICIO 3.

1º) a) entero positivo; b) fraccionario negativo; c) irracional negativo;
d) natural; e) fraccionario positivo; f) irracional positivo;
g) fraccionario negativo; h) irracional negativo; i) entero negativo.

3º) a) $+15^\circ$ b) $+35^\circ$ c) 0° d) -10°
e) -20°

4º) a) $+9$ b) -4 c) $+11$ d) $+4$
e) -8 f) -9 g) -3 h) $+8$
i) $+6$ j) -4 k) -7

EJERCICIO 4.

1º) 2,2 2º) 8 3º) $\frac{1}{2}$ 4º) $\sqrt{3}$
5º) π 6º) 0,5 7º) $\sqrt{2}$ 8º) $2\frac{1}{3}$
9º) 1 10º) $\frac{3}{8}$

EJERCICIO 5.

2º) a) $+6$ b) -6 c) -2 d) $+3$
e) $+3$ f) -3 g) $+5$ h) -9
i) -5 j) $+5$
3º) a) $+5^\circ$ b) -5° c) -15° d) -6°
e) -5° f) $+14^\circ$ g) $+4^\circ$ h) -7°

EJERCICIO 6.

- | | | | |
|-------------|----------|-------------|------------|
| a) + 9 | b) - 6 | c) - 6,7 | d) + 9 |
| e) + 1 | f) - 2 | g) + 4 | h) - 7 |
| i) - 10 | j) + 6 | k) - 5 | l) + 3 |
| m) 0 | n) 0 | ñ) - 10 | o) + 20 |
| p) - 5 | q) + 2,8 | r) - 13 | s) - 10,5 |
| 2º) - 1,5° | 3º) + 7 | 4º) 22 km/h | 5º) 37,5 m |
| 6º) - 2 min | | | |

EJERCICIO 7.

- | | | | |
|-----------|------------|-----------|-----------|
| a) - 9 | b) - 12 | c) - 4 | d) - 2 |
| e) + 3 | f) - 7 | g) - 4 | h) + 41 |
| i) - 53 | j) - 8 | k) + 1 | l) + 2 |
| m) + 6 | n) - 164 | ñ) - 250 | o) + 2,7 |
| 2º) + 21° | 3º) 180 \$ | 4º) 10 \$ | 5º) 750 m |

EJERCICIO 8.

- | | | | |
|---------------|----------------|--------------------|--------------------|
| a) + 5 | b) - 5 | c) - 8 | d) + 12 |
| e) - 1 | f) + 7 | g) $-5\frac{3}{4}$ | h) - 2,1 |
| i) - 105 | j) + 8 | k) - 2 | l) + 35 |
| m) - 1 | n) - 21 | ñ) + 4 | o) $+1\frac{1}{3}$ |
| 2º) + 1 800 m | 3º) + 439 años | 4º) - 11° | |

EJERCICIO 9.

- | | | | |
|----------------------|-------------|-------------|-------------|
| a) - 24 | b) + 24 | c) - 12 | d) + 28 |
| e) $-\frac{4}{5}$ | f) - 7,5 | g) - 8 | h) + 1,7 |
| i) + 6 | j) - 0,56 | k) + 6 | l) + 6 |
| m) + 40 | n) - 12 | ñ) + 32 | o) - 4 |
| 2º) - 24° | 3º) + 32° | 4º) - 30° | 5º) + 40° |
| 6º) a) - 150 km de A | b) - 150 km | c) + 100 km | d) + 100 km |

EJERCICIO 10.

1º)

a) $+16$

b) $+27$

c) -32

d) $+1,44$

e) $-3\,125$

f) $1/16$

g) $-27/64$

h) $0,000\,01$

i) -216

j) 4

3º)

a) $2^{10} = 1\,024$

b) $(-3)^6 = +729$

c) 5^9

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$

e) 3^6

f) $(-2)^{12}$

g) $\left(+\frac{1}{2}\right)^6$

h) 2^{11}

i) 2^{3n}

j) 3^{5n-3}

k) 3^{5n+3}

EJERCICIO 11.

1º)

a) $+4$

b) -2

c) $+10$

d) -6

e) $+15$

f) -4

g) -2

n) $+3$

i) $-\frac{5}{2}$

j) $-\frac{6}{5}$

2º)

a) -2

b) $+20$

c) -4

d) $+0,2$

e) $-0,5$

f) $+4$

g) $+17$

h) $+1$

i) $+1$

j) $\frac{1}{49}$

k) $\frac{1}{6}$

l) $\frac{1}{9}$

m) $\frac{1}{16}$

n) $+1$

ñ) $\frac{1}{125}$

o) 3^{n-3}

p) 2

q) 2^{n+6}

r) $\frac{1}{4^{2n}}$

s) 3^{n-2}

EJERCICIO 13.

a) $19,5^\circ$

b) $-6,2^\circ$

c) $+1^\circ$

d) -3°

e) $-0,5^\circ$

2º) $-0,4^\circ$

3º) $-0,25^\circ$

EJERCICIO 14.

- | | | | |
|------------------------|--------------------|-------------------|-------------------|
| 5º) a) 7 | b) 4,1 | c) 0 | d) $2\frac{1}{3}$ |
| 6º) a) +5 | b) -2 | c) $+\frac{1}{2}$ | d) -5,6 |
| 7º) a) $-\frac{1}{4}$ | b) +3 | c) $-\frac{5}{4}$ | d) -1 |
| 8º) a) -10 | b) +3 | | |
| 9º) a) +3 | b) -4 | c) +4 | d) -8 |
| 10º) a) -18 | b) -36 | c) $+\frac{1}{7}$ | |
| 11º) a) +81 | b) -128 | c) +27 | d) +16 |
| e) 4^9 | f) 2^6 | g) 2^6 | |
| 12º) a) -2 | b) -4 | c) +4 | d) -9 |
| e) 3^3 | | | |
| 13º) a) $\frac{1}{25}$ | b) $-\frac{1}{27}$ | c) +1 | d) +1 |
| 14º) a) 0 | b) -1 | | |

EJERCICIO 15.

- | | | |
|-----------------------------------|--|----------------------------|
| 1º) -1 | 2º) -2a | 3º) 11a |
| 4º) -3b | 5º) -x | 6º) -c |
| 7º) -10a + 11b | 8º) $4x^2 - 9x + 11$ | 9º) $3x^3 + 5x^2 - 6x - 2$ |
| 10º) $-y^4 - 2y^2 - 2$ | 11º) $12ac - 2bc$ | 12º) $5a^2b + 6ab^2$ |
| 13º) $2abc + 3a^2bc$ | 14º) $10ax + 3ay$ | 15º) $-5 + 3x^2y^2z^2$ |
| 16º) $3a^3 - 4a^2b + 3ab^2 + b^3$ | 17º) $5x^2 + 7xy - 4y^2$ | |
| 18º) $x^2yz + xyz + xyz^2$ | 19º) $7a^2bc - 3ab^2c - 3abc^2$ | |
| 20º) $3z^3 - 2z^2 - 3z + 12$ | 21º) $8ab^{-1} + 8a^{-1}b + 6a^{-2}b^{-3}$ | |
| 22º) $6x^{-2}y + 7xy^{-2}$ | 23º) $-\frac{1}{4}xy + \frac{5}{2}x^2y^2$ | |
| 24º) $3x^{-2} + 7x^{-1} + 3x + 6$ | 25º) $3x^ny^m + x^2y^m$ | |

EJERCICIO 16.

- | | | |
|---------------|--------|--------|
| 1º) 0 | 2º) 1 | 3º) 2 |
| 4º) 4 | 5º) 0 | 6º) 1 |
| 7º) 2 | 8º) -3 | 9º) 2n |
| 10º) $2n - 3$ | | |

EJERCICIO 17.

1º) 2

4º) 3

7º) 0

10º) 4

2º) 3

5º) 3

8º) -2

3º) 4

6º) 4

9º) 3

EJERCICIO 18.

1º)

a) $x^2 - 4x + 3$

b) $2x^3 - 5x^2 - 3x + 8$

c) $y^4 + y^3 - 9y^2 + 2y - 6$

d) $-z^5 - z^4 + 2z^3 + z^2 + z - 8$

e) $x^3 + 3x^2 - 2x - 5 + 2x^{-1} + x^{-2}$

2º)

a) $-5 + 3x - 6x^2 + x^3$

b) $1 - 4x - 2x^3 + x^5$

c) $2 + y + y^2 + y^3 - y^4$

d) $-3 + 2z - z^2 - z^4 + 2z^5 + z^6$

e) $3z^{-2} + z^{-1} + 6 + z + z^2$

3º)

a) $x^2 + xy + y^2$

b) $x^3 + x^2y + 2xy^2 + y^3$

c) $x^4 + 4ax^3 - 6a^2x^2 - 2a^3x + a^4$

d) $x^5 + x^4b - x^3b^2 + x^2b^3 + xb^4 + b^5$

e) $x^3 + 4x^2y - 5xy^2 - y^3 + x^{-1}y^4$

EJERCICIO 19.

I.

1º) entera;

2º) entera;

3º) fraccionaria;

4º) fraccionaria;

5º) entera;

6º) fraccionaria;

7º) fraccionaria;

8º) fraccionaria;

9º) fraccionaria;

10º) entera;

II.

$$1^\circ) A = \frac{1}{2} dd'$$

$$2^\circ) A = \frac{\sqrt{3}}{4} p^2$$

$$3^\circ) A = \frac{b + b'}{2} h$$

$$4^\circ) V = Bh$$

$$5^\circ) A = 2\pi rh$$

$$6^\circ) A = \pi rg$$

$$7^\circ) A = \pi r(r + g)$$

$$8^\circ) A = \pi(R^2 - r^2)$$

$$9^\circ) E = \frac{1}{2} mv^2$$

$$10^\circ) I = \frac{E}{R}$$

III.

$$1^\circ) 7$$

$$2^\circ) -4$$

$$3^\circ) 1,4$$

$$4^\circ) -7$$

$$5^\circ) 0$$

$$6^\circ) 4$$

$$7^\circ) 7$$

$$8^\circ) 22$$

$$9^\circ) 6\,375$$

$$10^\circ) 1$$

$$11^\circ) -9$$

$$12^\circ) 0$$

$$13^\circ) -\frac{22}{3}$$

$$14^\circ) -\frac{1}{8}$$

$$15^\circ) 288$$

$$16^\circ) 6$$

$$17^\circ) 15$$

$$18^\circ) 6$$

$$19^\circ) 0$$

$$20^\circ) -2,25$$

IV.

$$1^\circ) 360 \$$$

$$2^\circ) 31,5 \text{ m}^2$$

$$3^\circ) 38,5 \text{ cm}^2$$

$$4^\circ) 320 \text{ dm}^3$$

$$5^\circ) 1\,004,8 \text{ cm}^3$$

$$6^\circ) 2\,400 \text{ pies}$$

$$7^\circ) 80 \text{ m}$$

$$8^\circ) 125,6 \text{ cm}^2$$

$$9^\circ) 4\,188,8 \text{ cm}^3$$

$$10^\circ) 400 \text{ amperios.}$$

EJERCICIO 20.

$$1^\circ) a, b, d.$$

$$2^\circ) a, b, d.$$

$$3^\circ) c, d.$$

$$4^\circ) a) -2x^3, +5x^2, -3x, -4$$

$$b) 3x^2y, -x^2y^2, +5xy^2, -y^4$$

$$5^\circ) a) \text{ no } b) \text{ no } c) \text{ sí } d) \text{ sí } e) \text{ no } f) \text{ sí } g) \text{ sí}$$

$$6^\circ)$$

$$a) 8a - 5$$

$$b) -5a + 8b - 2c$$

$$c) 6x^2 - 8x + 6$$

$$d) -7x^3 + x^2 - 5x + 1$$

$$e) x^2 + 2y^2 + z^2 + 3x - y - 5z$$

- f) $7x^2y - 5xy^2 + 5x^2 + xy - y^2$
 g) $3a^2bc + 2ab^2c - 6abc^2 + 6abc$
 h) $-a^2 + 2ab + a^3b^{-1}$
 i) $2z^5 - z^{-1}$
 j) $9x^2y^n + xy^{n+1} + 6y^{n-2}$

7º)

- a) 1 b) 0 c) 7 d) 1 e) 8

8º)

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 2 e) 0

9º)

- a) a, c.

10º)

- a) $8 + 3x - x^2 - 2x^3$ b) $x^{-1} + 5 + x + x^2 - x^3$
 c) $a^3 + a^2x + ax^2 + x^3$ d) $x^{-2} + x^{-1} + 8 + x + x^2$

11º)

- a) $x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ b) $x^3 + x^2 - x + 3 + 2x^{-1}$
 c) $x^3 - bx^2 - b^3$ d) $x^2 + x + 1 - x^{-1} + x^{-2}$
 e) $2x^{n+2} + 4x^{n+1} + x^n - 3x^{n-1} + x^{n-2}$

12º)

- a) fraccionaria b) entera c) fraccionaria d) fraccionaria

V.

- 1º) $a^2 = b^2 + c^2$
 2º) $bc = ah$
 3º) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 + n^2$
 4º) $V = \frac{\sqrt{2}}{3} l^3$

VI.

- 1º) -34 2º) $-\frac{2}{5}$ 3º) -2
 4º) 27 5º) +3 6º) $\frac{1}{4}$
 7º) -71 8º) 74 9º) $-\frac{1}{24}$
 10º) -212.

EJERCICIO 21.

I.

- | | |
|---------------------------------|------------------------------|
| 1º) $3a + 2b - 5c$ | 2º) $x - y + 2z - 3u$ |
| 3º) $-2a + 3b$ | 4º) $3x + 2y - z$ |
| 5º) $x^2 + 4y$ | 6º) $2xy + 2$ |
| 7º) $-2a^2b + ab^2$ | 8º) $-3a^2 + 3b + 3b^2$ |
| 9º) $-7x + 4y$ | 10º) $a + 2xy$ |
| 11º) $2x^2 + 2xy + 4y^2$ | 12º) $-7a + 3b + 3c - d$ |
| 13º) $-x^2 - 2y^2 + 6z^2$ | 14º) $-3x^2y + 3xy^2 + 3y^3$ |
| 15º) $-a^2bc - 2ab^2c + 3abc^2$ | |

II.

- | | |
|---|--|
| 1º) $a - b + c + a^2 + b^2 + c^2 + ab + 2$ | |
| 2º) $3b - 2c$ | 3º) $2x^4 - 7x^3 - x^2 + 9x + 2$ |
| 4º) $4 - 3x + 2x^2 + 2x^3$ | 5º) $3a^2 + 2ax + 3x^2$ |
| 6º) $7y^3 - 3y^2 - 2y - 2$ | 7º) $2x^2 + 5x - 1 - x^{-1} + 3x^{-2}$ |
| 8º) $3x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 5$ | 9º) $3x^{n+2} + 2x^{n+1} - 2x^n$ |
| 10º) $3a^{2n} + 6b^{2n}$ | 11º) $3a + b + 5c$ |
| 12º) $x^2 - 3xy + 6y^2$ | 13º) $4x^3 + 11$ |
| 14º) $a^3 + b^3 + c^3 - d^3$ | 15º) $5a^5b^2 - 11a^4b^4 - a^2b^4 + 5a^3b^3$ |
| 16º) $1,5x^3 + 0,4x^2 + 8,4x - 18,6$ | |
| 17º) $\frac{7}{4}a^3 - \frac{1}{2}a^2b - \frac{3}{4}ab^2$ | |
| 18º) $-0,4x + 4 - x^{-1} + 2x^{-3}$ | |
| 19º) $-2a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + 5b^n$ | |
| 20º) $x^p - 3x^py^q - 3z^m$ | |

EJERCICIO 22.

I.

- | | |
|-----------|-----------|
| 1º) $3a$ | 2º) $-3a$ |
| 3º) $-7a$ | 4º) $7a$ |
| 5º) a | 6º) $6a$ |

- 7º) $2x - 3y$
 9º) $-9x^2$
 11º) $8b$
 13º) $-c^2$
 15º) $-6y - 8x$
 17º) $2xy$
 19º) $xy^2 + x^2y$
 21º) $a - b - c + d$
 23º) $-2b$
 25º) $-2b + 2d$
 27º) $2x^2 - 7x + 3$
 29º) $x^3 - 3x^2 + 9x - 1$
 31º) $-x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x + 4$
 33º) $y^4 + 2y^3 - y^2 + 4y + 11$
 35º) $-2x^4 + 3x^3y - 4xy^3$
 37º) $-a^2c - b^2a - c^2b$
 39º) $-x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4$
- 8º) $-3x + 4y$
 10º) $5ab^2$
 12º) $-7b$
 14º) $2b + 3a$
 16º) $2z^3$
 18º) $-5xyz$
 20º) $2x^n$
 22º) $x + y + z - u + v - w$
 24º) $2b$
 26º) $3x - 5y - 5z$
 28º) $3x^3 - 9x^2 + 8x - 1$
 30º) $-x^3 + 3x^2 - 6x + 9$
 32º) $-x^3 + x^2 + 4x + 3$
 34º) $-6a^2b - 2b^3$
 36º) $-3 - 5x + x^2 + x^3 + 5x^4$
 38º) $6xy^2z - 7x^2yz - 9xyz^2$
 40º) $x^{n+2} + 3x^{n+1} - 9x^n + x^{n-1}$

II.

$$41^\circ) x^2 - 3xy + 5y^2 - 8xz + 7yz + 4z^2$$

III.

$$42^\circ) 2x^4 - 6ax^3 - 3a^2x^2 + a^4$$

IV.

$$43^\circ) 2z^2 + 4xy + 4xz.$$

EJERCICIO 23.

- 1º) $a + b - c$
 3º) $a - b + c - d$
 5º) $3a - 2b$
 7º) $2x - 5$
 9º) $x^2 - 2x$
 11º) $-a - 3b + c$
 13º) $-x^3 + x^2 - 5x - 2$
 15º) $a - b + 3c - 3d$
 17º) $x^3 - y^3 + z^3$
 19º) $2u^2 + uv - vw - uw$
- 2º) $a - b + c$
 4º) $a - b - c - d$
 6º) $a - 4b$
 8º) $x - 2$
 10º) $x^2 - 8x + 2$
 12º) $-2x + 4y$
 14º) $x^2 - y^2 - z^2$
 16º) $a^2 - 3ax - x^2$
 18º) $ab - 3ac + bc$
 20º) $a - 2b + 2c - 3d.$

EJERCICIO 24.

1º)

- a) $a + (b - c + d)$ b) $a + (x + x^2 - x^3)$
 c) $x + (-y - z - u)$ d) $y^3 + (y^2 + y - 1)$
 e) $a^2 + b^2 + (c^2 - 2cd + d^2)$

2º)

- a) $a - (b + c - d)$ b) $4 - (x - x^2 + 2x^3)$
 c) $x^2 - (y^2 + 2yz + z^2)$ d) $a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$
 e) $m^2 + n^2 - (p^2 - 2pq + q^2)$

3º)

- a) $(ax + ay) - (cx + cy)$
 b) $(ax - bx + abx) - (cx - dx + cdx)$
 c) $(a^2 - 2ab + b^2) - (c^2 - 2cd + d^2)$
 d) $(a^2 + 2ab + b^2) - (x^2 + 2xy + y^2)$
 e) $(4a^2 + 4ab + b^2) - (9x^2 - 6x + 1)$
 f) $(ax - ay + az) - (mx - my + mz)$
 g) $(bp - bq + br - bs) - (cp - cq + cr - cs)$
 h) $(a^2 - 6ab + 9b^2) - (y^2 - 10y + 25)$
 i) $(25a^2 - 10ab + b^2) - (9x^2 - 12xy + 4y^2)$
 j) $(a^2x + b^2y + abz) - (c^2x + d^2y + cdz)$

EJERCICIO 25.

1º) $2a - b - c$

2º) $2b$

3º) 0

4º) $6x - 7$

5º) $a - 4b + 2c$

6º) $x - 3z$

7º) $a - 4b + 4c$

8º) $a^2 - 4ab + 2b^2$

9º) $2y^3$

10º) $5a + c$

11º) $4a - 6b - 3c$

12º) $-x + 12$

13º) $5 - x$

14º) $-3a + b + 6$

15º) $-4a - 3x + 7y$

16º) $-a^2 - b^2 + c^2$

17º) $8 - 7b$

18º) $x + a$

19º) 2

20º) $7x - 2y$

EJERCICIO 26.

I.

1º) $-2(a+x)$

2º) $3(a+y) + 2(b+y)$

3º) $3a(b+c)$

4º) $4ab^2(x-y)$

5º) $5n(n+1)$

6º) $(2a+3b)(x+y^2)$

7º) $x^2 - 2x(y+z)$

8º) $5a(b+c) - 6d$

9º) $-3xy - 3(x+y+z) + 4a(x-y)$

10º) $-2x^3 - 2x^2(y-z) + 3x(y+z)$

II.

1º) $3(x+y) - 2(y+z)$

2º) $-a(y+z)$

3º) $6a^2(x+y)^2$

4º) $-8a(b+c-d)$

5º) $\frac{1}{6}n(n-1)$

6º) $(3m+2n)(p+q)$

7º) $5a^2 - 8a(b+c)$

8º) $6a(b+x) + xy$

9º) $2x^2 + 2x(y+z) + y(x+z)$

10º) $2(x+y) + 4a(x-y) + 5b(x+y)(x-y)$

EJERCICIO 27.

1º) $3x^4 + 6x^3 + x^2 + 4x + 2$

2º) $x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 9$

3º) $2x^3 + 3x^2 - 8x + 5$

4º) $3x^3 + 2x^2y - 3xy^2 + y^3$

5º) $-5a^3b - a^2b^2 + ab^3 - b^4$

6º) $x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 4x + 5$

7º) $x^4 - 4x^2 - x + 9$

8º) $-x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 2x - 6$

9º) $2y^5 + 2y^4 + y^3 + 2y^2 - 1$

10º) $2z^6 + 2z^5 - z^4 - 2z^3 + 3z^2 + z - 2.$

EJERCICIO 28.

1º)

a) $3x - 2y + 4z$

b) $-2x^2 + 5x$

c) $3a^2b - 2ab^2 + ac^2$

d) $5x^n y^m$

e) 0

2º)

- a) $4a - 2b + 5c - 2d$
- b) $-x^3 - 3x^2 - 5$
- c) $3,3y^3 + y^2 + 2,1y - 5,3$
- d) $-7x^2y^2 + 4xy^3 + 2y^4 + 2z^n$
- e) $2a^2(b+c) - 3a(b+c)^2 + 3(a+b)(c+d)$

3º)

- a) $7ab$
- b) $-5x + 3y$
- c) $2x^2y^3$
- d) $-2x^ny^m$
- e) $-2x(a+b+y)$
- f) $2a+b+c+2d$
- g) $a^2 + 2ax - 12x^2$
- h) $5x^3 - 3x^2y - 12xy^2 + 3y^3$
- i) $3a^2b^2 - 2ab^3$
- j) $a(x+y) + 2a^2(x+y) - 3b(x-y)$

4º)

- a) $2a - b + 2c - d$
- b) $a - 3c + 2d$
- c) $2x^4 - 5x^3y + 8x^2y^2 - 4y^3$
- d) $3x - 3y + 4z$
- e) $3x^2 - 3y^2 + z^2$

5º)

- a) $(3ax - 4az) - (2by - 2bz)$
- b) $(a^2 - a^2c^2) - (b^2 + b^2d^2)$
- c) $(a^2x - a^2z - a^2xy) - (b^2y - b^2x)$
- d) $(-a^2 + a^2c - ad) - (-2bc - 2bd + 2b^2)$
- e) $(am + an - ap) - (bm + bn - bp)$

6º)

- a) $10x - 2y - 5z$
- b) $-5x^2 - 3ax + a^2$
- c) $4a - 3$
- d) $-y + 2z$
- e) $5a - 2x + y$

7º)

$$x^2 - 4xy + 7y^2 + 2xz - z^2 - 5x(y+z).$$

EJERCICIO 29.

- | | |
|-------------------|-------------------------|
| 1º) $-6xy$ | 2º) $20xy^2z$ |
| 3º) $-12a^3b^2$ | 4º) $-3x^3y^3z^3$ |
| 5º) $16abcd$ | 6º) $-12a^2x^4y^2z^2$ |
| 7º) $-12ab^2c^2d$ | 8º) $-10x^{m+3}y^{n+2}$ |
| 9º) a^6b^8c | 10º) $3x^{2m}$ |
| 11º) $-x^3y^3z^5$ | 12º) $-2a^{5n+1}$ |

EJERCICIO 30.

- | | |
|---|--------------------------------|
| 1º) $ab - ac + ad$ | 2º) $px + qx - rx$ |
| 3º) $-3x^3 + 15x^2 - 18x$ | 4º) $x^2y^2 + x^2z^2 - x^4$ |
| 5º) $2a^3b - 2a^2b^2 + 2ab^3$ | 6º) $x^4 - x^3 + 2x^2$ |
| 7º) $-2x^3y^2 + 6x^2y^3 - 4xy^4$ | 8º) $y^4z^2 - y^3z^3 + y^2z^4$ |
| 9º) $-\frac{1}{2}x^3yz - \frac{1}{2}xy^3z - \frac{1}{2}xyz^3 + x^2y^2z + x^2yz^2 - xy^2z^2$ | |
| 10º) $4x^6y^3 - 20x^5y^4 + 8x^4y^5 - 24x^3y^6 + 16x^2y^7$ | |
| 11º) $a^4b^2c^2 - b^6c^2 + b^2c^6 - a^2b^4c^2 + a^2b^2c^4 - b^4c^4$ | |
| 12º) $4ab^3c^2 - 12a^2b^3c^3 + 20a^3b^6c^3$ | |
| 13º) $x^{n+3} - 2x^{n+2} + 5x^{n+1} + 6x^n$ | |
| 14º) $6x^{n+1} - 12x^n - 18x^{n-1} + 9x^{n-2}$ | |
| 15º) $2x^{2n-1}y^m + 2x^{2n-2}y^{2m-2} + 2x^ny^{2m-1}$ | |

EJERCICIO 31.

I.

- | | |
|--|--|
| 1º) $x^2 + 13x + 40$ | 2º) $x^2 - 7x + 12$ |
| 3º) $x^2 + 4x - 12$ | 4º) $x^2 + 4x - 21$ |
| 5º) $x^2 - 16$ | 6º) $-x^2 + 4x - 3$ |
| 7º) $2x^2 - 13x + 15$ | 8º) $6x^2 + 5x - 6$ |
| 9º) $8x^2 - 16xy + 6y^2$ | 10º) $x^2 + 2xz - y^2 + z^2$ |
| 11º) $3a^4 - a^2b^2 - 2b^4$ | 12º) $x^3 + x^2 - 8x - 6$ |
| 13º) $ac - bc - ad + bd$ | |
| 14º) $am + bm - cm - an - bn + cn$ | |
| 15º) $m^2 + m^2n - mn^2 - n^2$ | |
| 16º) $x^2 - xy - xz - 2y^2 + 5yz - 2z^2$ | |
| 17º) $a^5 - a^3b^2 + a^2b^3 - b^5$ | 18º) $x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 - x - 2$ |

- 19º) $1,2x^3 + 0,38x^2 - 4,5x + 3,6$ 20º) $2x^3 + a^2x^2 + 4ax + 2a^3$
 21º) $x^4 - 6x^3y + 9x^2y^2 - y^4$ 22º) $a^4 + a^2b^2 + b^4$
 23º) $x^3 - y^3$ 24º) $x^6 + y^6$
 25º) $3x^4 + 7x^3y - 18x^2y^2 + 5xy^3 + 2y^4$
 26º) $x^4 - y^4$
 27º) $0,42x^4 + 1,2x^3 + 6,01x^2 + 4,82x + 3$
 28º) $x^6 - x^5 - 9x^4 + 3x^2 + 24x - 14$
 29º) $x^5 - x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 84x - 80$
 30º) $-2x^6 + 7x^5 - 5x^4 + 7x^3 + x^2 - 14x + 6$
 31º) $x^8 + x^4y^4 + y^8$
 32º) $6x^4 - 5x^2y^2 + 2x^2z^2 - 6y^4 + 23y^2z^2 - 20z^4$
 33º) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
 34º) $a^3 + b^3 - 1 + 3ab$
 35º) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + z^3$
 36º) $2 - 12x^2 + 5x^3 + x^4 - x^5$
 37º) $a^{n+1} - a^n - 4a^{n-1} + 5a^{n-2} + 2a^{n-3}$
 38º) $x^{2n+5} - 4x^{2n+4} - 5x^{2n+3} + 12x^{2n+2} + 21x^{2n+1} - 18x^{2n}$
 39º) $x^{4n} - 1$ 40º) $a^{1p} + a^{2p}b^{2q} + b^{1q}$
 41º) $x^4 - 1$ 42º) $x^5 + y^5$
 43º) $-x^7 + 7x^5 - x^4 - 9x^3 - 4x^2 + 4x - 2$
 44º) $x^7 - 3x^6 - 13x^5 + 40x^4 - 31x^3 + 3x^2 + 3x$
 45º) $a^5 - b^5$
 46º) $x^5 - x^4y - 2x^3y^2 + 2x^2y^3 + xy^4 - y^5$
 47º) $6x^7 - 12x^6y + 3x^5y^2 - 11x^4y^3 + 15x^3y^4 + 7xy^6 + 4y^7$

II.

- 1º) a) $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 14x - 6$ b) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x - 2$
 c) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 7x + 3$
 2º) a) $x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + 4$ b) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9$
 c) $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1$
 3º) $x^6 - x^5 - 12x^4 + 7x^3 + 27x^2 - 26x + 6.$

EJERCICIO 32.

- 1º) $6x^2 - 11x - 10$ 2º) $x^3 - 7x^2 + 14x - 6$
 3º) $x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 9x - 6$ 4º) $x^4 - x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

5º) $x^5 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 8$

6º) $y^8 - y^2$

7º) $x^4 - y^4$

8º) $x^5 + 32y^5$

9º) $12a^4 - 5a^3b - 4a^2b^2 + 5ab^3 - 2b^4$

10º) $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

EJERCICIO 33.

1º) $3x^3$

2º) $-2x^3$

3º) $-5abc$

4º) $2n$

5º) $-0,5yz$

6º) $2x^{-2}y$

7º) $-5ay^{-1}$

8º) $-0,25x^2y^2z$

9º) $1,5x^2z^3$

10º) $-b$

11º) $-2a^2b$

12º) $-4x^my^3$

EJERCICIO 34.

1º) $a + 2b$

2º) $x - 2x^4$

3º) $-1,5a + 3a^2$

4º) $x + 5 + 2x^{-1}$

5º) $x - 4 + 6x^{-1} - 2x^{-2}$

6º) $ac^{-1} - b^{-1}c + abc$

7º) $-3a^2 + 2ab - 5b^3$

8º) $5x^2y - 2y^2 + 3$

9º) $m^5 - 2m^3n^2 + 4mn^4$

10º) $2x^4y^7z^{-1} - 3x^2yz^2 + 0,5y^2z^{-1}$

11º) $x^{2n+1} - x^{n+2} + 2x^3$

12º) $a^{m+2} + 3a^{m+1} - 4a^m$

EJERCICIO 35.

I.

1º) $x + 4$

2º) $x - 4$

3º) $x + 8; R = 5$

4º) $a^2 - 5a + 18; R = -59$

5º) $b^2 + 8b + 32; R = 134$

6º) $x^3 + 2x^2 + 4x + 8$

7º) $x^2 - x + 1$

8º) $x^2 + x + 1; R = 2$

9º) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

10º) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1; R = -2$

11º) $2x^2 - x - 6; R = -11$

12º) $x^2 - 5x - 5; R = 8x + 6$

13º) $x^2 - 2x + 2$

14º) $3a^2 - 6a - 5$

15º) $-a^2 - 3a - 9$

16º) $a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$

17º) $-2b^2 + b + 1$

18º) $y^2 - 2y + 1; R = 5y - 9$

19º) $x + 1$

20º) $0,7x^2 - 0,8x - 0,3$

21º) $0,7y^2 - 0,5$

22º) $2x^{2n} + 3x^n - 4$

23º) $2x^{2n} - 8x^n + 26; R = -137$

24º) $x^{2m} - x^m + 1$

25º) $5a^{3n+4} - 2a^{3n+3} + a^{3n+2} + a^{3n+1}$

II.

26º) $x - y$

27º) $x^2 + 2xy + y^2$

28°) $x^2 + 4xy + 7y^2$; $R = 8y^3$

29º) $x^2 - xy + y^2$; $R = -2y^3$

30°) $x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$ 31°) $x + y$

31°) $x + y$

32°) $x^4 - x^2y^2 + y^4$

33°) $x^2 + xz - z^2$; $R = -2xz^3 + 2z^4$

34º) $2x^2 - 3ax + 7a^2$

35°) $2x^3 - 3x^2y - 7xy^2$

36°) $x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2 - 4xy^3 + 4y^4$

37º) $x - y - z$

38°) $x^2 + 2xy - xz + y^2 - yz + z^2$

39°) $x^2 - xy - xz + y^2 - yz + z^2$

40º) $x - y - z$

41º) $x^2 - 2xy + 5xz + 4y^2 + 10yz + 25z^2$

42°) $x + y + 2z$

43º) $x^n - y^n$

449) $x^n y^n - 5x^{n-1} y^{2n}$

459) $x^{3m} - 2x^{2m}y^n + 4x^m y^{2n}$

III.

46º) a) $2x + 5y$; $R = 6y^2$

b) $-y - 10x$; $R = 24x^2$

47º) a) $2x - 2y$; $R = 3y^2$

b) $y - 7x$; $R = 27x^2$

48º) a) $x^2y^{-1} + x + y$; $R = y^4$

b) $2y + 2x; R = x^2y^2 - 2x^3y + x^4$

49º) a) $x^2 y^{-2}$; $R = x^2 y^4 - 3xy^5 + y^8$

b) $x^{-2}y^2$; $R = x^4y^2 - 3x^5y + x^6$

50°) a) $x^2 + 3xy + y^2$

b) $y^2 + 3xy + x^2$

EJERCICIO 36.

I.

1°) $2x + 1; R = 9$

2º) $3x - 2; R = 3$

39) $x^2 - 2x - 7$; $R = -6$

4º) $x^2 + 4x + 18$; $R = 67$

- 5º) $x^3 - 6x^2 + 4x - 15$; $R = 66$
 6º) $3x^3 - 9x^2 + 2x - 11$; $R = 41$
 7º) $x^2 - 3x - 13$; $R = -20x + 20$
 8º) $x^2 - 3x + 12$; $R = -42x + 30$
 9º) $x^2 - 2xy - 2y^2$; $R = -6y^3$
 10º) $2x^2 + xy + 4y^2$; $R = -8xy^3 + 13y^4$

II.

- 11º) $x - 7$; $R = 2$ 12º) $x + 8$; $R = 19$
 13º) $x^2 - 2x + 3$; $R = -4$ 14º) $2x^2 - x + 2$; $R = -10$
 15º) $x^2 + 7x + 23$; $R = 59$ 16º) $4x^2 + 4x - 16$
 17º) $x^3 - 3x^2 + 8x - 24$; $R = 80$ 18º) $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$
 19º) $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 10x + 22$; $R = -54$
 20º) $x^5 + x^4 + x + 1$; $R = 4$.

EJERCICIO 37.

- 1º) $x + \frac{2}{x+1}$ 2º) $x^2 + 3x + 6 + \frac{8}{x-2}$
 3º) $2x + 1 + \frac{-7}{x^2 - x + 1}$ 4º) $x^2 + 2x + 2 + \frac{x-10}{x^2 - 2x + 3}$
 5º) $x^3 + x + \frac{1}{x-1}$ 6º) $x - 3y + \frac{4y^2}{x+y}$
 7º) $x + 6y + \frac{14y^2}{x-2y}$ 8º) $x^2 - 2xy - y^2 + \frac{-2y^3}{x-y}$
 9º) $x + y + \frac{-2xy^2}{x^2 + y^2}$ 10º) $a^4 + a^3b - ab^3 - b^4$

EJERCICIO 38.

I.

- 1º) $6x^3y^4zt$ 2º) $-7,5a^3b^3c^3$
 3º) $-8x^2y^2z^2$ 4º) $6x^{2n}y^n$
 5º) $a^2b^2 - b^4 + b^2c^2$ 6º) $a^4b^3 - 5a^3b^4 - a^2b^5$
 7º) $a^{n+2} + 2a^{n+1} + a^n$ 8º) $a^{2n+1}b^m - a^{2n}b^{2m} + a^nb^{2m+1}$
 9º) $2x^2 - 3xy + 5xz - 2y^2 + 5yz - 3z^2$

- 10º) $2x^4 - 15x^3y + 26x^2y^2 - 16xy^3 + 6y^4$
 11º) $-2x^6 + 5x^5 + 6x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 12x - 4$
 12º) $x^{2n+4} - 5x^{2n+3} + 9x^{2n+2} - 10x^{2n+1} - 12x^{2n} + 5x^{2n-1}$

II.

- 1º) $x^5 - 6x^4 + 6x^3 + x - 2$
 2º) $x^6 + x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 3x - 6$
 3º) $a^6 - a^5 + 3a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 6$
 4º) $b^6 - b^5 + 2b^4 + b^3 - 3b^2 + 4b - 4$
 5º) $3x^4 - 11x^3y + 13x^2y^2 - 7xy^3 + 2y^4$
 6º) $a^5 + a^4b - 2a^3b^2 - 2a^2b^3 + ab^4 + b^5$

III.

- 1º) $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$
 2º) $4(a^2 + b^2 + c^2)$

IV.

- 1º) $-3xyz^2$ 2º) $2a^2b$
 3º) $0,5x^2yz^{-2}$ 4º) $-4x^m y^{n+2}$
 5º) $1,5b - a$ 6º) $x^3 - x + 2$
 7º) $6y - 9x + 12xy$ 8º) $2xy^m - x^ny$

V.

- 1º) $x^2 - 2x - 4; R = -6$
 2º) $x^2 + 2x + 7; R = 23x + 6$
 3º) $1,2y^3 + 0,4y^2 - 0,6y - 1,8$
 4º) $\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}$

VI.

- 1º) $a^3 + 6a^2b + 2ab^2 + 7b^3; R = 27b^3$
 2º) $a^{n+2} - 2a^{n+1}b^n - 3a^n b^{2n} + a^{n-1}b^{3n}$

VII.

- 1º) $x^2 + 25x - 111; R = 547$
 2º) $x^3 - 6x^2 - 24x + 4; R = -2$
 3º) $x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 24x + 6$

VIII.

$$1^\circ) 3x^2 - 1 + \frac{7}{x+2}$$

$$2^\circ) x^2 + x + 5 + \frac{17x - 33}{x^2 - 4x + 5}$$

$$3^\circ) x^3 + 2x^2y + xy + 2y^2 + \frac{5y^4}{x - 2y}$$

EJERCICIO 39.

I.

$$1^\circ) x = 4$$

$$2^\circ) 2x = 3$$

$$3^\circ) x = 1$$

$$4^\circ) 4x = -1$$

$$5^\circ) -2x = 4$$

$$6^\circ) x = 2$$

$$7^\circ) 2y = -8$$

$$8^\circ) 3y = 3$$

$$9^\circ) 3z = 4$$

$$10^\circ) 6z = 6$$

II.

$$1^\circ) x = 2$$

$$2^\circ) x = 3$$

$$3^\circ) x = -4$$

$$4^\circ) 5 = x$$

$$5^\circ) x = -3$$

$$6^\circ) x = 2$$

$$7^\circ) x = 6$$

$$8^\circ) x = -12$$

$$9^\circ) y = 2$$

$$10^\circ) y = \frac{1}{2}.$$

EJERCICIO 40.

$$1^\circ) x = 3$$

$$2^\circ) x = 4$$

$$3^\circ) x = -1$$

$$4^\circ) x = 2$$

$$5^\circ) x = 9$$

$$6^\circ) x = 3$$

$$7^\circ) x = 1$$

$$8^\circ) x = 6$$

$$9^\circ) x = 7$$

$$10^\circ) x = 3$$

$$11^\circ) x = 2$$

$$12^\circ) x = 3$$

$$13^\circ) y = 1$$

$$14^\circ) z = 2$$

$$15^\circ) x = 7,5$$

$$16^\circ) y = -0,9$$

$$17^\circ) x = 1,25$$

$$18^\circ) x = -\frac{4}{3}$$

$$19^\circ) x = -88$$

$$20^\circ) x = 5$$

$$21^\circ) x = 1$$

$$22^\circ) x = 6$$

$$23^\circ) x = -4$$

$$24^\circ) x = 4$$

$$25^\circ) x = -37$$

$$26^\circ) x = 3$$

$$27^\circ) x = 2$$

$$28^\circ) x = 5$$

$$29^\circ) x = -1$$

$$30^\circ) x = 1$$

$$31^\circ) x = 2$$

$$32^\circ) x = 4$$

$$33^\circ) x = 2$$

$$34^\circ) x = 6$$

$$35^\circ) x = 1,25$$

$$36^\circ) x = 5$$

- | | | |
|-----------------|---------------|----------------|
| 37º) $x = -0,4$ | 38º) $x = 2$ | 39º) $x = 0,5$ |
| 40º) $x = 28$ | 41º) $x = 0$ | 42º) $x = 1$ |
| 43º) $x = 2$ | 44º) $x = -7$ | 45º) $y = 2$ |
| 46º) $z = -0,5$ | 47º) $x = -1$ | 48º) $y = 3$ |
| 49º) $z = -1$ | 50º) $x = -2$ | |

EJERCICIO 41.

- | | | |
|--------------------------------|------------------------------|------------------|
| 1º) $x + 5$ | 2º) $x - 8$ | 3º) $x^2 + 2$ |
| 4º) x^3 | 5º) $5x$ | 6º) $3x - 4$ |
| 7º) $0,05x$ | 8º) $n, n + 1, n + 2$ | 9º) $2n, 2n + 2$ |
| 10º) $x^2 - x$ | 11º) $dq + r$ | 12º) $D - dq$ |
| 13º) a) $15 - x$; b) $15 + x$ | 14º) a) $x + 2$; b) $x + m$ | |
| 15º) $100c + 10d + u$ | 16º) $5x + 10y + 20z$ | |
| 17º) $50t; \frac{5}{6}m$ | 18º) $100p - 10m - 20n$ | |
| 19º) a) $6x$; b) $2x^2$ | 20º) $\frac{1}{x}$ | |

EJERCICIO 42.

- | | |
|---|--|
| 1º) 15 | 2º) 10 |
| 3º) 4 | 4º) 9 |
| 5º) Pedro, 36; Juan, 12 | 6º) Julio, 5,50 \$; hermano, 4,50 \$ |
| 7º) Padre, 50; hijo, 10 | 8º) 25 y 26 |
| 9º) 20, 21 y 22 | 10º) 10 y 17 |
| 11º) 34 y 97 | 12º) A, 350 \$; B, 1 050 \$; C, 2 100 \$ |
| 13º) 44 y 56 | 14º) 19 y 28 |
| 15º) 16 y 64 | |
| 16º) cabeza, 3 lbs; cuerpo, 12 lbs; cola, 5 lbs | |
| 17º) ancho, 7 cm; largo, 21 cm | |
| 18º) norcoreanos, 21; norteamericanos, 4 | |
| 19º) 5 000 \$, 10 000 \$, 15 000 \$ | |
| 20º) 21,25 m y 26,25 m | 21º) 6, 12, 24, 48 |
| 22º) 48, 49, 50, 51 | 23º) 31, 33, 35 |
| 24º) 1 150 \$ y 250 \$ | 25º) 30 \$, 22,50 \$. |

EJERCICIO 43.

- | | |
|--|--------------------------------|
| 1º) A 60 \$; B 30 \$ | 2º) A, 225 \$; B, 75 \$ |
| 3º) 14, 10 | 4º) Juan, 55 \$; Jenaro, 45 \$ |
| 5º) 4 p.m. | 6º) 6 000 \$ |
| 7º) 3 \$ | 8º) Padre, 30; hijo, 10 |
| 9º) Padre, 48; hijo, 12 | 10º) Padre, 60; hijo, 30 |
| 11º) Padre, 35; hijo, 15 | 12º) Padre, 28; hijo, 7 |
| 13º) 15, 10 | 14º) Madre, 30; hija, 6 |
| 15º) 6 años | 16º) 2 años |
| 17º) 30 años | 18º) — 4 años (hace 4 años) |
| 19º) $\frac{3}{5}$ | 20º) $\frac{5}{8}$ |
| 21º) 100 y 80 | 22º) 90 y 60 |
| 23º) lado del cuadrado, 12; área, 144;
dimen. del rect., 18 y 8 | 24º) 30 y 31 |
| | 25º) 19 y 21. |

EJERCICIO 44.

- | | | |
|--|-----------------------------------|----------|
| 1º) 42°, 48° | 2º) 80°, 100° | |
| 3º) 35 cm, 21 cm | 4º) 165, 363 | |
| 5º) 36°, 54°, 90° | 6º) 15 de 10 ctvs.; 9 de 20 ctvs. | |
| 7º) 14 de 10 ctvs.; 42 de 5 ctvs. | 8º) 5 de 5 \$; 20 de 1 \$ | |
| 9º) 15 de 5 ctvs.; 20 de 10 ctvs.;
30 de 20 ctvs. | 10º) 200 mayores; 120 menores | |
| 11º) 24 | 12º) 71 | 13º) 63 |
| 14º) 13 | 15º) 52 | 16º) 421 |
| 17º) 126 | 18º) 835 | 19º) 248 |
| 20º) 456. | | |

EJERCICIO 45.

- | | | |
|---------------|--------------|---------------|
| 1º) | | |
| a) $x = 6$ | b) $x = -2$ | c) $x = 1.25$ |
| d) $x = -2,5$ | e) $x = -3$ | f) $x = 1.75$ |
| g) $x = 2,5$ | h) $x = 5,5$ | i) $y = -1,5$ |
| j) $x = 1$ | | |

2º)

- a) $2x + x^2$
 b) $2p + 1, 2p + 3, 2p + 5$
 c) $25 + x$
 d) $1.000x + 100(2x) + 10(x + 2) + (x - 1)$
 e) $10m + 50n + 100p$

3º) 7

4º) A, 128; B, 32

5º) 24, 26, 28

6º) A, 1 800 \$; B, 1 200 \$; C, 3 600 \$

7º) José, 100 \$; Pedro, 50 \$

8º) A, 120 \$; B, 60 \$

9º) 72 000 \$

10º) 35, 7

11º) 23 años

12º) $84^\circ 36'$ 13º) $\frac{2}{5}$

14º) 60, 56

15º) 4 de 5 \$; 18 de 10 \$; 4 de 20 \$

16º) 93

17º) 623

18º) 800 litros

19º) 12 000 \$ al 3%; 8 000 \$ al 4%

20º) 6 avestruces; 11 llamas

21º) naranjas, 50 ctvs.;
manzanas, 90 ctvs.; 380 ctvs.

22º) 5 \$

23º) 49 \$

24º) hombres, 8 400; mujeres, 7 500;
niños, 2 500

25º) 2 litros

26º) 1 litro.

EJERCICIO 46.1º) $ab + ac - ad$ 2º) $a^3 - a^2b + a^2c$ 3º) $2x^3 + 2x^2y + 2x^2z$ 4º) $a^5 - a^4 + 3a^3$ 5º) $pm + pn + qm + qn$ 6º) $pm - pn + qm - qn$ 7º) $xu - xv - yu + yv$ 8º) $a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$ 9º) $3ax + 3bx - 2ay - 2by$ 10º) $6ax - 4bx - 3ay + 2by$ **EJERCICIO 47.**1º) $c^2 + 2cd + d^2$ 2º) $9a^2 + 6ab + b^2$ 3º) $x^2 + 4xy + 4y^2$ 4º) $a^2 + 2a + 1$ 5º) $9 + 6b + b^2$ 6º) $16x^2 + 8xy + y^2$

- 7º) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$
 9º) $x^4 + 2x^3 + x^2$
 11º) $x^2 - 2xy + y^2$
 13º) $25 - 10a + a^2$
 15º) $a^2 - 8ab + 16b^2$
 17º) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$
 19º) $x^6 - 2x^3y^3 + y^6$
 21º) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
 22º) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz$
 23º) $9a^2 + 4b^2 + c^2 + 12ab - 6ac - 4bc$
 24º) $x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2$
- 8º) $x^6 + 2x^3y^3 + y^6$
 10º) $a^4 + 2a^2b^3 + b^6$
 12º) $x^2 - 6x + 9$
 14º) $4a^2 - 12ab + 9b^2$
 16º) $9x^2 - 6x + 1$
 18º) $p^4 - 2p^2q^2 + q^4$
 20º) $a^4 - 2a^2b^3 + b^6$

EJERCICIO 48.

- 1º) $11^2 - 3^2 = 112$
 3º) $a^2 - 1$
 5º) $x^2 - 25y^2$
 7º) $9a^2 - 4b^2$
 9º) $36 - a^2$
 11º) $a^4 - b^2$
 13º) $x^6 - y^0$
 15º) $9p^4 - 4q^4$
 17º) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$
 19º) $1 + 2a + a^2 - b^2$
 20º) $(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = a^4 + a^2b^2 + b^4$
- 2º) $x^2 - y^2$
 4º) $x^2 - 9$
 6º) $4a^2 - b^2$
 8º) $x^2 - 100$
 10º) $a^2b^2 - 4$
 12º) $a^4 - b^4$
 14º) $25a^2x^2 - y^2$
 16º) $0,04 - a^6$
 18º) $a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 - c^2$

EJERCICIO 49.

- 1º) $x^2 + 3x + 2$
 3º) $x^2 + 3x - 4$
 5º) $x^2 + 4x - 12$
 7º) $a^2 + 2a - 48$
 9º) $y^2 + 22y + 120$
 11º) $x^2 + 5xy + 6y^2$
 13º) $a^2 + 2ab - 15b^2$
 15º) $a^2b^2 - 2abc - 8c^2$
- 2º) $x^2 + 7x + 12$
 4º) $x^2 - 5x + 6$
 6º) $a^2 + 2a - 3$
 8º) $a^2 - 14a + 45$
 10º) $b^2 - 4b - 96$
 12º) $x^2 - 6xy + 8y^2$
 14º) $a^2b^2 - ab - 12$
 16º) $6x^2 + 13x + 6$

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| 17º) $6x^2 + 23x + 20$ | 18º) $12x^2 + 23x + 5$ |
| 19º) $8x^2 - 10x - 3$ | 20º) $15a^2 + 14a - 8$ |
| 21º) $16m^2 - 34m - 15$ | 22º) $14b^2 - 25b + 6$ |
| 23º) $72x^2 + x - 1$ | 24º) $6x^2 - 25x - 150$ |
| 25º) $20p^2 + 28p - 3$ | 26º) $12x^2 - 5xy - 2y^2$ |
| 27º) $6x^2 + 5xy - 4y^2$ | 28º) $2a^2 - 3ab - 2b^2$ |
| 29º) $20a^2 + 7ab - 6b^2$ | 30º) $12a^2 - 61ab + 70b^2$ |

EJERCICIO 50.

- 1º) $30^3 + 3,30^2,5 + 3,30,5^2 + 5^3 = 42\ 875$
- 2º) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
- 3º) $1 + 3b + 3b^2 + b^3$
- 4º) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$
- 5º) $a^3 + 12a^2b + 48ab^2 + 64b^3$
- 6º) $40^3 - 3,40^2,5 + 3,40,5^2 - 5^3 = 42.875$
- 7º) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
- 8º) $8 - 12a + 6a^2 - a^3$
- 9º) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$
- 10º) $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$
- 11º) $x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6$
- 12º) $a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6$
- 13º) $8x^6 + 36x^4y^2 + 54x^2y^4 + 27y^6$
- 14º) $27x^6 - 135x^4y^2 + 225x^2y^4 - 125y^6$
- 15º) $a^9 + 3a^6b^3 + 3a^3b^6 + b^9$
- 16º) $a^9 - 3a^6b^3 + 3a^3b^6 - b^9$
- 17º) $a^3b^3 + 3a^2b^2c^2 + 3abc^4 + c^6$
- 18º) $m^3 - 3m^2pq + 3mp^2q^2 - p^3q^3$
- 19º) $x^{12} + 3x^8y + 3x^4y^2 + y^3$
- 20º) $x^3 - 3x^2y^3 + 3xy^6 - y^9$

EJERCICIO 51.

- | | | |
|-----------------|-----------------|---------------------|
| 1º) $2^3 + 3^3$ | 2º) $m^3 + n^3$ | 3º) $a^3 + 2^3$ |
| 4º) $x^3 + 1$ | 5º) $27 + b^3$ | 6º) $125a^3 + 8b^3$ |
| 7º) $p^3 - q^3$ | 8º) $x^3 - 1$ | 9º) $y^3 - 27$ |

- | | | |
|------------------|-----------------------|---------------------|
| 10º) $8 - a^3$ | 11º) $8a^3 - 27b^3$ | 12º) $x^3 - 125y^3$ |
| 13º) $a^6 + 8$ | 14º) $b^6 - 8$ | 15º) $x^6 - y^3$ |
| 16º) $a^3 + b^6$ | 17º) $8a^6 + b^6$ | 18º) $8x^6 - y^6$ |
| 19º) $a^9 - b^9$ | 20º) $(x + y)^3 + 27$ | |

EJERCICIO 52.

I.

- | | | |
|-----------------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1º) $x - y + z$ | 2º) $a + c + b$ | 3º) $a - 2b + 5c$ |
| 4º) $x + y + z$ | 5º) $x + 1$ | 6º) $a + 5$ |
| 7º) $x + 6y$ | 8º) $a^2 + b^2$ | 9º) $m - 1$ |
| 10º) $b - 4$ | 11º) $2p - 5q$ | 12º) $a^2 - b^2$ |
| 13º) $x - 1$ | 14º) $2 - y$ | 15º) $3a - 2b$ |
| 16º) $10ab - 1$ | 17º) $a + 4$ | 18º) $5 + b$ |
| 19º) $7x + 6y$ | 20º) $ab + c$ | 21º) $a^2 - a + 1$ |
| 22º) $a^2 - 3a + 9$ | 23º) $4x^2 - 2xy + y^2$ | 24º) $a^2b^2 - abc + c^2$ |
| 25º) $x^2 + x + 1$ | 26º) $y^2 + 2y + 4$ | 27º) $25 + 5x + x^2$ |
| 28º) $4x^2 + 6xy + 9y^2$ | 29º) $x^2 + xyz + y^2z^2$ | |
| 30º) $(a + b)^2 + (a + b)c + c^2$ | | |

EJERCICIO 53.

I.

- | | |
|---|---|
| 1º) $3x^3 - 3x^2y + 3x^2z$ | 2º) $4a^3 + 6a^2b - 4a^2c$ |
| 3º) $ax + ay - bx - by$ | 4º) $m^2p^2 + m^2q^2 + n^2p^2 + n^2q^2$ |
| 5º) $a^2 + 6ab + 9b^2$ | 6º) $x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4$ |
| 7º) $4a^2 - 20ab + 25b^2$ | 8º) $9x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ |
| 9º) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$ | |
| 10º) $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy + 20xz - 30yz$ | |
| 11º) $x^2 - 100y^2$ | 12º) $a^4 - 9b^2$ |
| 13º) $x^2 - 2x - 48$ | 14º) $a^2 + 7a - 60$ |
| 15º) $10x^2 + 17x + 3$ | 16º) $12x^2 + 10x - 12$ |
| 17º) $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$ | 18º) $27x^3 + 27x^2y^2 + 9xy^4 + y^6$ |
| 19º) $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$ | 20º) $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$ |
| 21º) $x^3 + 125$ | 22º) $27x^3 + 8y^3$ |
| 23º) $a^3 - 64$ | 24º) $a^3 - 27b^3$ |

II.

- | | |
|---|---------------------------|
| 1º) $2a + 3b + 4c$ | 2º) $3abc - 2 + b$ |
| 3º) $3c + d$ | 4º) $4x^2 + y^2$ |
| 5º) $x - 2y$ | 6º) $3p - 4q$ |
| 7º) $a - 8$ | 8º) $a^2 - 4$ |
| 9º) $5 + y$ | 10º) $9 + z^2$ |
| 11º) $c^2 - 4c + 16$ | 12º) $1 - xy + x^2y^2$ |
| 13º) $36x^2 + 6x + 1$ | 14º) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ |
| 15º) $(x - y)^2 - (x - y)z + z^2$ | |
| 16º) $(a + b)^2 + (a + b)(c + d) + (c + d)^2$ | |

EJERCICIO 54.

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1º) $a(a - 2)$ | 2º) $x(x + 1)$ |
| 3º) $3x(2x - 1)$ | 4º) $y(a - b)$ |
| 5º) $ab(a + b)$ | 6º) $x(x^2 + 5)$ |
| 7º) $xy^2(x - y)$ | 8º) $2x(x^2 - 2x + 2)$ |
| 9º) $x(x^2 + x + 2)$ | 10º) $a(a^2 - 3a + 1)$ |
| 11º) $5pq(p - 2q + pq)$ | 12º) $2b(b^2 - 4b + 2)$ |
| 13º) $x^2(x^2 - xy + y^2)$ | 14º) $4ab(2b - a + ab)$ |
| 15º) $pqr(1 - p + r)$ | 16º) $8x^2(3 + 2x^2 + 5x)$ |
| 17º) $a^2bx^2(a^2 + 2ab^2x - b^3x)$ | 18º) $t^2(t^2 + 3 - t^4)$ |
| 19º) $x^2(x^3 - x + 1)$ | 20º) $y^2z^2(x^2yz^2 - 2x + 3z)$ |
| 21º) $7m^2n^2(n + 2m - 3mn^2)$ | 22º) $3a^2(3a^2 - 2x + ax^2)$ |
| 23º) $a^2(1 - a^2 + a^4 - a^6)$ | 24º) $4a^5b^2c^3(ac + 2bc + 3ab^2)$ |
| 25º) $(a + b)(x + y)$ | 26º) $(m + n)(x - y)$ |
| 27º) $(a + b)(x + y - z)$ | 28º) $(a + 3)(x^2 + y^2)$ |
| 29º) $(x - y)(a^2 + b^2 + c^2)$ | 30º) $(a + b + c)(x + y)$ |

EJERCICIO 55.

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| 1º) $(a + b)(x + y)$ | 2º) $(a - b)(m + n)$ |
| 3º) $(a - b)(p - q)$ | 4º) $(x - y)(a + m)$ |
| 5º) $(x + z)(x - b)$ | 6º) $(y + a)(y - b)$ |
| 7º) $(x - y)(x - 4)$ | 8º) $(3y - 2z)(x - a)$ |
| 9º) $(a + 2b)(c - d)$ | 10º) $(u - v)(x - y)$ |

- | | |
|------------------------------|-----------------------------|
| 11º) $(x - y)(3a - 5b)$ | 12º) $-a(2 + b)(x + y)$ |
| 13º) $(a + 3b)(m + 2n)$ | 14º) $(a - 3m)(b - 2m)$ |
| 15º) $(x^2 + 1)(x - a)$ | 16º) $(x + 2)(x^2 + 4)$ |
| 17º) $(x - 3)(x^2 + 2)$ | 18º) $(x - 4)(x^2 - 5)$ |
| 19º) $x(2x + 3)(x^2 - 3)$ | 20º) $(az + b)(z^3 - 2)$ |
| 21º) $(1 - m)(m^2 + 1)$ | 22º) $(ab + c^2)(a - d)$ |
| 23º) $(2x - z)(y + 3x)$ | 24º) $(x^2 + bc)(ab - cy)$ |
| 25º) $(1 - 3a)(3a^2 - 7b^2)$ | 26º) $(1 + x)(1 - x^2yz)$ |
| 27º) $(a + b)(x + y + z)$ | 28º) $(a - b + c)(x + y^2)$ |
| 29º) $(3a + 2b - m)(m - 2n)$ | 30º) $(x + y + 1)(a - 1)$ |

EJERCICIO 56.

- | | | |
|------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1º) $(3a + b)^2$ | 2º) $(a - 2b)^2$ | 3º) $(x + 4y)^2$ |
| 4º) $(x - 5z)^2$ | 5º) $(2a - 3c)^2$ | 6º) $(a - 1)^2$ |
| 7º) $(b + 1)^2$ | 8º) $(x - 7)^2$ | 9º) $(5 - y)^2$ |
| 10º) $(10x + 1)^2$ | 11º) $(9a - 5b)^2$ | 12º) $(8 - 3z)^2$ |
| 13º) $(11a + 4x)^2$ | 14º) $(1 - 6m)^2$ | 15º) $(x + \frac{1}{2})^2$ |
| 16º) $(a - 0,25)^2$ | 17º) $(xy - 2z)^2$ | 18º) $(2a + 7bc)^2$ |
| 19º) $(x^2 + y^2)^2$ | 20º) $(a^2 - 5b^2)^2$ | 21º) $(a^3 + 3)^2$ |
| 22º) $(a^3 - 2x^3)^2$ | 23º) $(z^4 + 1)^2$ | 24º) $(a^2b^3 - c)^2$ |
| 25º) $(2a^2 - 9b^2)^2$ | 26º) $(0,1 - x^2)^2$ | 27º) $(a + b - c)^2$ |
| 28º) $(x + y + 3)^2$ | 29º) $(4 - (x - z))^2$ | 30º) $(a + b + c + d)^2$ |

EJERCICIO 57.

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1º) $(80 + 20)(80 - 20) = 6\,000$ | 2º) $(a + 2b)(a - 2b)$ |
| 3º) $(b + 1)(b - 1)$ | 4º) $(3x + y)(3x - y)$ |
| 5º) $(2a + 3c)(2a - 3c)$ | 6º) $(2x + 5y)(2x - 5y)$ |
| 7º) $(4 + 9a)(4 - 9a)$ | 8º) $(10 + 6x)(10 - 6x)$ |
| 9º) $(x + 0,5)(x - 0,5)$ | 10º) $(a + 0,01b)(a - 0,01b)$ |
| 11º) $(ab + 3x)(ab - 3x)$ | 12º) $(2a^2 + bc)(2a^2 - bc)$ |
| 13º) $(a^3 + b^2)(a^3 - b^2)$ | 14º) $(x^4 + 7y^3)(x^4 - 7y^3)$ |
| 15º) $(20a^2 + b)(20a^2 - b)$ | 16º) $(2x^4 + y^5)(2x^4 - y^5)$ |
| 17º) $(11m^3 + 30n^6)(11m^3 - 30n^6)$ | 18º) $(8x^7 + 0,6a^5)(8x^7 - 0,6a^5)$ |

- 19º) $(2xyz + b^4)(2xyz - b^4)$ 20º) $(12xy^2 + z^3)(12xy^2 - z^3)$
 21º) $(a^2 + x^2)(a + x)(a - x)$ 22º) $(a + b + c)(a + b - c)$
 23º) $(4 + b^2)(2 + b)(2 - b)$ 24º) $(a - b + c)(a - b - c)$
 25º) $(1 + x^4)(1 + x^2)(1 + x)(1 - x)$
 26º) $(x + y + z)(x - y - z)$
 27º) $(a^4 + 16)(a^2 + 4)(a + 2)(a - 2)$
 28º) $(xy + a - z)(xy - a + z)$
 29º) $(a^5 + 1)(a^4 + 1)(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$
 30º) $(2x - y + z)(2x - y - z)$
 31º) $(x^2 + y^4)(x + y^2)(x - y^2)$
 32º) $(x + y + a - b)(x + y - a + b)$
 33º) $(a^6 + 9)(a^3 + 3)(a^3 - 3)$
 34º) $-(3a - b)(a + 3b)$
 35º) $[(x + y)^2 + 1](x + y + 1)(x + y - 1)$
 36º) $3(a + 1)(a - 1)$
 37º) $(2x + a - 5)(-a + 1)$ 38º) $4x(z - y)$
 39º) $(3a + b + 2c)(a + 3b - 4c)$ 40º) $-4a(a^2 + 1)$
 41º) 54 cm^2 42º) 36 m^2 .

EJERCICIO 58.

- 1º) $(a - b + 2x)(a - b - 2x)$ 2º) $(x + y + a)(x + y - a)$
 3º) $(x - y + z)(x - y - z)$ 4º) $(2a - b + c)(2a - b - c)$
 5º) $(3a + b + 2c)(3a + b - 2c)$
 6º) $(2x - 3y + 4a)(2x - 3y - 4a)$
 7º) $(a + b + c)(a - b - c)$ 8º) $(x + y - z)(x - y + z)$
 9º) $(1 + a + 2x)(1 - a - 2x)$ 10º) $(5 + m - n)(5 - m + n)$
 11º) $(z + 3x - y)(z - 3x + y)$
 12º) $(2c + 5a - 3b)(2c - 5a + 3b)$
 13º) $(10x + y + 7z)(10x - y - 7z)$
 14º) $(y + 6a - 4x)(y - 6a + 4x)$
 15º) $(a - b + c - d)(a - b - c + d)$
 16º) $(x - z + y + t)(x - z - y - t)$
 17º) $(2a - c + 2b - 1)(2a - c - 2b + 1)$
 18º) $(3 - a + b + 5c)(3 - a - b - 5c)$

- 19º) $(5a + 3x + 4y + z)(5a + 3x - 4y - z)$
 20º) $(2a - 3m + 5b + 2c)(2a - 3m - 5b - 2c)$
 21º) $(x - 1 + y + z)(x - 1 - y - z)$
 22º) $(a + 3x + y^2 + 2)(a + 3x - y^2 - 2)$
 23º) $(1 - x^2 + 2y + 3z)(1 - x^2 - 2y - 3z)$
 24º) $(5x^2 + a^2 + 3x^3 - 2)(5x^2 + a^2 - 3x^3 + 2)$
 25º) $(xy - 1 + z^2 + 2b^2)(xy - 1 - z^2 - 2b^2)$
 26º) $(x - z + 1 - y)(x - z - 1 + y)$
 27º) $(x^2 - y^2 + a^2 + b^2)(x^2 - y^2 - a^2 - b^2)$
 28º) $(3a^2 + b^2 + 4a^3 + 1)(3a^2 + b^2 - 4a^3 - 1)$
 29º) $(x + 2y + a + 2)(x + 2y - a - 2)$
 30º) $(b^3 + y^3 + x^3 - a^3)(b^3 + y^3 - x^3 + a^3).$

EJERCICIO 59.

- 1º) $(1 + x^2 + x)(1 + x^2 - x)$
 2º) $(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$
 3º) $(x^2 + 3y^2 + 2xy)(x^2 + 3y^2 - 2xy)$
 4º) $(5x^2 + y^2 + 3xy)(5x^2 + y^2 - 3xy)$
 5º) $(4a^2 + 3b^2 + 4ab)(4a^2 + 3b^2 - 4ab)$
 6º) $(3a^2 - 2b^2 + 3ab)(3a^2 - 2b^2 - 3ab)$
 7º) $(3x^2 + 5 + 2x)(3x^2 + 5 - 2x)$
 8º) $(m^2 - 4 + 3m)(m^2 - 4 - 3m)$
 9º) $(a^2 + b^2 + 3ab)(a^2 + b^2 - 3ab)$
 10º) $(x^2 + 3y^2 + 5xy)(x^2 + 3y^2 - 5xy)$
 11º) $(2 + a^2 + 2a)(2 + a^2 - 2a)$
 12º) $(x^2 + 8 + 4x)(x^2 + 8 - 4x)$
 13º) $(8x^2 + y^4 + 4xy^2)(8x^2 + y^4 - 4xy^2)$
 14º) $(b^2 + 32 + 8b)(b^2 + 32 - 8b)$
 15º) $(10x^2 + 7y^2 + 9xy)(10x^2 + 7y^2 - 9xy)$
 16º) $(6a^2 - 5b^2 + 3ab)(6a^2 - 5b^2 - 3ab)$
 17º) $(a^2 + 20x^2 + 3ax)(a^2 + 20x^2 - 3ax)$
 18º) $(a^2 + 2b^2 + 5ab)(a^2 + 2b^2 - 5ab)$
 19º) $(a^2 - bc + b^2 + c^2)(a^2 - bc - b^2 - c^2)$
 20º) $(1 + xy + x^2 + y^2)(1 + xy - x^2 - y^2).$

EJERCICIO 60.

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1º) $(x + 3)(x + 4)$ | 2º) $(x + 3)(x + 5)$ |
| 3º) $(x + 4)(x + 5)$ | 4º) $(x + 2)(x + 4)$ |
| 5º) $(x - 2)(x - 3)$ | 6º) $(x - 4)(x - 5)$ |
| 7º) $(a - 1)(a - 2)$ | 8º) $(a - 1)(a - 5)$ |
| 9º) $(b - 2)(b + 5)$ | 10º) $(b - 1)(b + 5)$ |
| 11º) $(y - 3)(y + 6)$ | 12º) $(z - 1)(z + 4)$ |
| 13º) $(x + 2)(x - 3)$ | 14º) $(x + 3)(x - 5)$ |
| 15º) $(a + 2)(a - 7)$ | 16º) $(a + 4)(a - 6)$ |
| 17º) $(c + 1)(c + 8)$ | 18º) $(c - 1)(c - 8)$ |
| 19º) $(x + 4)(x - 9)$ | 20º) $(x - 2)(x + 11)$ |
| 21º) $(a - 3)(a - 12)$ | 22º) $(a + 4)(a + 15)$ |
| 23º) $(m - 5)(m + 18)$ | 24º) $(c + 8)(c - 15)$ |
| 25º) $(x - 2y)(x - 5y)$ | 26º) $(x + 3y)(x + 4y)$ |
| 27º) $(a - 3b)(a + 7b)$ | 28º) $(a + 6b)(a - 8b)$ |
| 29º) $(a - 3x)(a - 17x)$ | 30º) $(y - 5z)(y + 15z)$ |
| 31º) $(a^2 - 3)(a^2 - 8)$ | 32º) $(x^2 + 3)(x^2 - 11)$ |
| 33º) $(ab - 2)(ab + 18)$ | 34º) $(ab + 6c)(ab - 12c)$ |
| 35º) $(x - 0,3)(x - 0,5)$ | 36º) $(a + 0,04)(a + 0,25)$ |
| 37º) $(ax - 4)(ax + 9)$ | 38º) $(ax + 4y)(ax - 10y)$ |
| 39º) $(c^3 - 4)(c^3 - 16)$ | 40º) $(a + 1)(a - 1)(a + 2)(a - 2)$ |
| 41º) $(x^2 - 5)(x^2 - 23)$ | 42º) $(x^2 + 4)(x^2 - 27)$ |
| 43º) $(a^2 - 6b)(a^2 + 20b)$ | 44º) $(x + 5y^2)(x + 30y^2)$ |
| 45º) $(ab + 2c)(ab - 50c)$ | 46º) $(y - \frac{1}{2})(y - \frac{1}{3})$ |
| 47º) $(x^2 + 4y^2)(x^2 - 24y^2)$ | 48º) $(a^3 + 12b)(a^3 - 15b)$ |
| 49º) $(x^n + 5)(x^n - 24)$ | 50º) $(a^n + 4)(a^n + 36)$ |

EJERCICIO 61.

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 1º) $(2x + 1)(x + 1)$ | 2º) $(2x + 1)(x + 2)$ |
| 3º) $(2x + 1)(x + 3)$ | 4º) $(3x + 2)(x + 1)$ |
| 5º) $(4a + 1)(a + 3)$ | 6º) $(2a - 1)(a - 3)$ |
| 7º) $(2b - 3)(b - 2)$ | 8º) $(3x - 2)(2x - 1)$ |
| 9º) $(3a - 2)(2a - 3)$ | 10º) $(2a - 5)(2a - 1)$ |

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 11º) $(2x - 5)(2x - 3)$ | 12º) $(2b - 3)(b - 4)$ |
| 13º) $(3a - 2)(2a - 5)$ | 14º) $(4x - 3)(6x - 5)$ |
| 15º) $(2x + 3)(2x - 1)$ | 16º) $(2x - 3)(2x + 1)$ |
| 17º) $(2a - 3)(a + 4)$ | 18º) $(4b + 1)(3b - 1)$ |
| 19º) $(3a + 4)(2a - 1)$ | 20º) $(2x - 1)(x + 3)$ |
| 21º) $(2x - 5)(3x + 2)$ | 22º) $(4a - 1)(a + 5)$ |
| 23º) $(2b - 5)(2b - 3)$ | 24º) $(2x + 3)(x - 3)$ |
| 25º) $(2x + 3)(3x - 7)$ | 26º) $(3xy - 1)(2xy + 1)$ |
| 27º) $(6x + 5)(x - 5)$ | 28º) $(8y + 3)(y - 5)$ |
| 29º) $(4x - 5)(x + 7)$ | 30º) $(6x - 5)(x + 9)$ |
| 31º) $(3x + a)(2x - 3a)$ | 32º) $(2a - b)(a - 6b)$ |
| 33º) $(3a + 4b)(3a - 2b)$ | 34º) $(2x + 5y)(4x - 7y)$ |
| 35º) $(5x + y)(2x - 5y)$ | 36º) $(5y + 2z)(2y - 5z)$ |
| 37º) $-(5x - y)(x - 6y)$ | 38º) $-(4a + 3b)(6a - 5b)$ |
| 39º) $(4x - 3a)(2x - 5a)$ | 40º) $(6x - 5y)(5x + 3y)$ |

EJERCICIO 62.

- | | |
|---|------------------------------------|
| 1º) $(x + y)(x^2 - xy + y)^2$ | 2º) $(ab + c)(a^2b^2 - abc + c^2)$ |
| 3º) $(1 + b)(1 - b + b^2)$ | 4º) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ |
| 5º) $(a + 5)(a^2 - 5a + 25)$ | 6º) $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$ |
| 7º) $(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$ | |
| 8º) $(a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$ | |
| 9º) $(2x + y)(16x^4 - 8x^3y - 8x^3y + 4x^2y^2 - 2xy^3 + y^4)$ | |
| 10º) $(2a + 3b)(16a^4 - 24a^3b + 36a^2b^2 - 54ab^3 + 81b^4)$ | |
| 11º) $(x + y^2)(x^2 - xy^2 + y^4)$ | |
| 12º) $(x + y^2)(x^4 - x^3y^2 + x^2y^4 - xy^6 + y^8)$ | |

EJERCICIO 63.

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1º) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ | 2º) $(a - bc)(a^2 + abc + b^2c^2)$ |
| 3º) $(a - 1)(a^2 + a + 1)$ | 4º) $(x - 5)(x^2 + 5x + 25)$ |
| 5º) $(y - 2)(y^2 + 2y + 4)$ | 6º) $(2x - 5y)(4x^2 + 10xy + 25y^2)$ |
| 7º) $(x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$ | |
| 8º) $(a - 2)(a^4 + 2a^3 + 4a^2 + 8a + 16)$ | |
| 9º) $(2x - 1)(16x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1)$ | |

- 10º) $(3a - 2b)(81a^4 + 54a^3b + 36a^2b^2 + 24ab^3 + 16b^4)$
 11º) $(x - y)(x^2 + xy^3 + y^6)$
 12º) $(x^2 - a)(x^8 + ax^6 + a^2x^4 + a^3x^2 + a^4).$

EJERCICIO 64.

- 1º) $(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$
 2º) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
 3º) $(x^2 + 4y^2)(x^4 - 4x^2y^2 + 16y^4)$
 4º) $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$
 5º) $(x^4 + y^4)(x^8 - x^4y^4 + y^8)$
 6º) $(x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$
 7º) $(a^2 + x^2)(a^8 - a^6x^2 + a^4x^4 - a^2x^6 + x^8)$
 8º) $(a + x)(a^4 - a^3x + a^2x^2 - ax^3 + x^4)(a - x) + (a^4 + a^3x + a^2x^2 + ax^3 + x^4)$
 9º) $(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$
 10º) $(a^4 + 1)(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$
 11º) $(x^4 + y^4)(x^{16} - x^{12}y^4 + x^8y^8 - x^4y^{12} + y^{16})$
 12º) $(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
 13º) $(x^4 + y^2)(x^8 - x^4y^2 + y^4)$
 14º) $(x^2 + y)(x^4 - x^2y + y^2)(x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2)$
 15º) $(a^4 + 9)(a^8 - 9a^4 + 81)$
 16º) $(a^2 + 3b^2)(a^4 - 3a^2b^2 + 9b^4)(a^2 - 3b^2)(a^4 + 3a^2b^2 + 9b^4)$
 17º) $(x^2y^2 + z^6)(x^4y^4 - x^2y^2z^6 + z^{12})$
 18º) $(a^3 + b)(a^6 - a^3b + b^2)(a^3 - b)(a^6 + a^3b + b^2)$
 19º) $[(a + b)^2 + c^2][(a + b)^4 - (a + b)^2c^2 + c^4]$
 20º) $[a + b + c][a^2 - a(b + c) + (b + c)^2][a - b - c] + [a^2 + a(b + c) + (b + c)^2].$

EJERCICIO 65.

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| 1º) $(x + 2)(x^2 + x + 1)$ | 2º) $(x - 3)(x^2 - x + 1)$ |
| 3º) $(x + 1)(x - 2)(x - 3)$ | 4º) $(x - 1)(x + 2)(x + 3)$ |
| 5º) $(x - 5)(x^2 - 3x + 1)$ | 6º) $(x + 3)(x^2 - 3x - 1)$ |
| 7º) $(x + 3)(x^2 - 3x + 1)$ | 8º) $(x + 2)(x^2 + 5x + 2)$ |
| 9º) $(x + 1)(x - 2)^2$ | 10º) $(x - 1)(x^2 + 5x + 5)$ |

- 11º) $(x-3)(x^3-x^2+1)$ 12º) $(x-2)(4x^2-4x+3)$
 13º) $(x-3)(x^3+x+2)$ 14º) $(x-5)(2x^2+x-2)$
 15º) $(x-2)(x+3)(x^2+x+1)$ 16º) $(x+3)(x^2-x+3)$
 17º) $(x-3)(x-4)(x^2-x+1)$ 18º) $(x+5)(x^2-5x+1)$
 19º) $(x+4)(x^2-4x+2)$
 20º) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

EJERCICIO 66.

I.

- 1º) 3 3º) 5 5º) 36
 2º) 11 4º) 4

II.

- 1º) 13 3º) 1 5º) 32
 2º) 5 4º) 0

III.

- 1º) No 5º) No 8º) No
 2º) Sí 6º) Sí 9º) Sí
 3º) Sí 7º) No 10º) Sí
 4º) Sí

IV.

- 1º) $-(x-y)(y-z)(z-x)$
 2º) $(x+y)(y+z)(z+x)$
 3º) $(a+b)(b+c)(c+a)$
 4º) $-(a+b)(a-b)(b+c)(b-c)(c+a)(c-a)$
 5º) $3(x+y)(y+z)(z+x)$.

EJERCICIO 67.

- 1º) Sí 2º) Sí 3º) Sí 4º) No
 5º) No 6º) Sí 7º) Sí 8º) Sí
 9º) No 10º) No 11º) Sí 12º) Sí
 13º) Sí 14º) No 15º) No 16º) No
 17º) Sí 18º) Sí 19º) Sí 20º) Sí.

EJERCICIO 68.

- 1º) $a(3a - 5)$
- 3º) $x^2(2x^3 - 4 + 5x)$
- 5º) $xy(2x - 6y + 3)$
- 7º) $3abc(abc - 2 + 3a^2b^2c^2)$
- 9º) $2a^2(y + 2y^2 + 4)$
- 11º) $(2x - 5y)(x + 2a)$
- 13º) $(x + 3)(x^2 + 4)$
- 15º) $(5x - 1)(4x^3 - 1)$
- 17º) $(a + b)(x + y + z)$
- 19º) $(x - y + z)(a + 1)$
- 21º) $(a + 3b)^2$
- 23º) $(x - 5)^2$
- 25º) $(11a - 5)^2$
- 27º) $(6x - 7y)^2$
- 29º) $(2x^2 + 3y^2)^2$
- 31º) $(a + 3)(a - 3)$
- 33º) $(5 + 10a)(5 - 10a)$
- 34º) $(ab + 4c)(ab - 4c)$
- 35º) $(x + \frac{5}{2}y)(x - \frac{5}{2}y)$
- 36º) $(x^2 + 2y)(x^2 - 2y)$
- 37º) $3a^3(a + 2b^2)(a - 2b^2)$
- 38º) $(x^4 + 16)(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$
- 39º) $(x - 3y + 4z)(x - 3y - 4z)$
- 40º) $(3x - 1)(-x + 5)$
- 41º) $(x + y + 2z)(x + y - 2z)$
- 42º) $(x + y + z)(x - y - z)$
- 43º) $(3x + 2a - 1)(3x - 2a + 1)$
- 44º) $(1 + a - 3b)(1 - a + 3b)$
- 45º) $(c + a - 1)(c - a + 1)$
- 46º) $(x - y + a + 1)(x - y - a - 1)$
- 47º) $(x - 1 + a - y)(x - 1 - a + y)$
- 48º) $(a^2 - b^2 + a - 3)(a^2 - b^2 - a + 3)$
- 2º) $x(x^2 + xy + 2y^2)$
- 4º) $a^2b(a^2 - ab + b^2)$
- 6º) $5a^3x(1 + 2x - 4x^2)$
- 8º) $4xy(x^2y^2 - 2xyz^2 + 3z)$
- 10º) $3ac(2a - 4c - ac)$
- 12º) $(x + y)(x - a)$
- 14º) $(a - 1)(a - 1)(a^2 + a + 1)$
- 16º) $(1 + a)(1 - a^2mn)$
- 18º) $(a - b + c)(a - 1)$
- 20º) $x^4(x^{n-3} + 1)(x^{n-1} - 1)$
- 22º) $(2x + 1)^2$
- 24º) $(1 - 10y)^2$
- 26º) $(x^3 + 7)^2$
- 28º) $(5ab - 4c)^2$
- 30º) $(x + y - 3a)^2$
- 32º) $x(1 + x^2)(1 + x)(1 - x)$

- 49° $(5x - a + 1 - 2yz)(5x - a - 1 + 2yz)$
 50° $(a^2 - x + x^2 + y^2)(a^2 - x - x^2 - y^2)$
 51° $(b^2 + 1 + b)(b^2 + 1 - b)$
 52° $(a^2 - x^2 + ax)(a^2 - x^2 - ax)$
 53° $(a^2 + 5b^2 + 3ab)(a^2 + 5b^2 - 3ab)$
 54° $(5a^2 + 4b^2 + 4ab)(5a^2 + 4b^2 - 4ab)$
 55° $(2a^2 + b^2 + 2ab)(2a^2 + b^2 - 2ab)$
 56° $(x^4 + 8y^4 + 4x^2y^2)(x^4 + 8y^4 - 4x^2y^2)$
 57° $(x + 5)(x + 2)$ 58° $(x - 8)(x + 1)$
 59° $(x - 4y)(x + y)$ 60° $(a + 7b)(a - 3b)$
 61° $(5x - 3)(x - 1)$ 62° $(3x - 5)(x + 1)$
 63° $(2a - 3)(2a + 1)$ 64° $(3a + b)(2a - 3b)$
 65° $(2x + z)(x + 2z)$ 66° $(4a - 5x)(3a + 2x)$
 67° $(a + 5)(a^2 - 10a + 25)$ 68° $(2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)$
 69° $(ab + 4)(a^2b^2 - 4ab + 16)$ 70° $(6 + x^2)(36 - 6x^2 + x^4)$
 71° $(4x - 7y^3)(16x^2 + 28xy^3 + 49y^6)$
 72° $(xy^2 + 1)(x^2y^4 - xy^2 + 1)$
 73° $(a + 5)(a^2 + 4a + 7)$
 74° $(x - y + z)[x^2 + x(y - z) + (y - z)^2]$
 75° $2x(3x^2 + y^2)$
 76° $2(3a^2 + 1)$
 77° $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$
 78° $(a + 1)(a - 1 - b)$
 79° $(a - b)(a + b + a^2 + ab + b^2)$
 80° $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2y)$
 81° $(x^2 - xy + y^2)(1 - x - y)$ 82° $(x - 2)(x^2 + 3x + 3)$
 83° $(x + 1)(x - 2)(x + 4)$ 84° $(x + 1)(x^2 - 5x + 5)$
 85° $(x - 1)(x^2 + 6x + 6)$ 86° $(x + 2)(x^3 + x^2 - 2x + 2)$
 87° $x(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
 88° $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1)$
 89° $(a - x)^3$
 90° $(x + y + z)^2$
 91° $(a - b)(a + b)^3$
 92° $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$

- 93º) $(a + b)(a^2 + ab + b^2)$
 94º) $(3m^2 + 2b^2 + 3mb)(3m^2 + 2b^2 - 3mb)$
 95º) $y^n(x + y)^2$
 96º) $c^n(c^n + 1)(c^{2n} + 1)$
 97º) $b^2(a^2 + 4b^2 + 3ab)(a^2 + 4b^2 - 3ab)$
 98º) $x(a + 1)(a - 1 - 2x)$
 99º) $(x^2y^3 + z^4)(x^4y^6 - x^2y^3z^4 + z^8)$
 100º) $(x - 3y)(7x^2 + 3xy + 3y^2)$
 101º) $(x + y + 1)(x + y + 2)$
 102º) $(2x - 2y)(3x + 2y - 3z)$
 103º) $(x - 4)(x^3 - x^2 + x + 1)$
 104º) $[3 - 2(a + b)][4 + 5(a + b)]$
 105º) $(4x^n + y + z)(4x^n - y - z)$
 106º) $(2u - 3v + x + y)(2u - 3v - x - y)$
 107º) $x(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$
 108º) $(x^2y^2 + 2 + 2xy)(x^2y^2 - 2 - 2xy)$
 109º) $(x - y)(a^2 + bx + by)$ 110º) $(x - y + z)^2$
 111º) $(x - 2y + 1)(x + 2)(x - 2)$ 112º) $(m - n - 1)^2$
 113º) $(x + y - z)(2y - a)$ 114º) $(x + y - z)(x - y + z + 1)$
 115º) $(a + 2)(12a^2 - 4a + 7)$ 116º) $(a - 2b)(2a - b - 3c)$
 117º) $(a + b - c)(a - b + c + 1)$ 118º) $(x - 3y - 3)(x - 3y - 5)$
 119º) $(a + 4b - 5)(a + 4b + 4)$ 120º) $(3a - b + 7x)(3a - b - 3x)$
 121º) $(a + b - c)(2b - d)$
 122º) $(a^2 - xy + x^2 + y^2)(a^2 - xy - x^2 - y^2)$
 123º) $(1 + ab + a^2 + b^2)(1 + ab - a^2 - b^2)$
 123º) $(1 + ab + a^2 + b^2)(1 + ab - a^2 - b^2)$
 124º) $(x^2 + 2y^2 + x^4 + 1)(x^2 + 2y^2 - x^4 - 1)$
 125º) $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1).$

EJERCICIO 69.

- | | | |
|---------------------|------------|-------------------|
| 1º) $10x^2$ | 2º) $4a^4$ | 3º) $15xy$ |
| 4º) $7x^2y^2z^2$ | 5º) $10ax$ | 6º) $a^3b^2c^2$ |
| 7º) $7x^2y^3$ | 8º) a^2m | 9º) $2x(a - b)^2$ |
| 10º) $3a(x + y)^2.$ | | |

EJERCICIO 70.

- | | | |
|-----------------------|------------------------|-------------------|
| 1º) $x - 5$ | 2º) $x(x + 3)$ | 3º) $x + 2$ |
| 4º) $2x + y$ | 5º) $a^2 + 3ab + 9b^2$ | 6º) $a^2 - 4$ |
| 7º) $a - 5b$ | 8º) $x^2(x - 4)$ | 9º) $2a - 5b$ |
| 10º) $x - y$ | 11º) $x^2 - y^2$ | 12º) $x - y$ |
| 13º) $x - 3$ | 14º) $a^2 - a + 1$ | 15º) $x^2 + y^2$ |
| 16º) $x^2 - x + 1$ | 17º) $x(x + 2y)$ | 18º) $2(2x - 3y)$ |
| 19º) $(a + 3)(a - 2)$ | 20º) $(x + 2)^2$ | |

EJERCICIO 71.

- | | | |
|-------------------------|------------------------|--------------------------|
| 1º) $x^2 - 2x + 2$ | 2º) $3x + 4$ | 3º) $x^2 + x - 6$ |
| 4º) $x - 1$ | 5º) $x^2 - 5x + 1$ | 6º) $x^3 + x^2 - x - 1$ |
| 7º) $3x^2 - x + 4$ | 8º) $x^2 + x - 6$ | 9º) $x^3 + x^2 - 2x + 1$ |
| 10º) $x^2 - 3x + 1$ | 11º) $x^2 + 5xy - y^2$ | 12º) $x - 3y$ |
| 13º) $2x^2 - xy + 2y^2$ | 14º) $x + 2$ | 15º) $2x - 1$ |

EJERCICIO 72.

- | | | |
|--------------------|-------------------|-------------------|
| 1º) $x - 4$ | 2º) 1 | 3º) $x + 1$ |
| 4º) $x^2 - 2x + 3$ | 5º) $x^2 + x + 1$ | 6º) $x^2 + x + 1$ |
| 7º) $x - 1$ | 8º) $x^2 - y^2$ | 9º) 1 |
| 10º) $x - 3$ | | |

EJERCICIO 73.

- | | | |
|---------------------------|-------------------|----------------------|
| 1º) $72x^3$ | 2º) $180a^5$ | 3º) $150x^3y^3$ |
| 4º) $192x^2y^4$ | 5º) $30a^2b^2c^3$ | 6º) $42abxyz^2$ |
| 7º) $x^2y^2z^3$ | 8º) $60a^2b^3$ | 9º) $30a^2(x + y)^3$ |
| 10º) $240a^4b^2(y - z)^4$ | | |

EJERCICIO 74.

- | | |
|---------------------------|-----------------------------------|
| 1º) $x(x - 6)(x + 1)$ | 2º) $3(x - 1)^2(x + 3)$ |
| 3º) $y(y + 2)(y - 2)^2$ | 4º) $(a - 2)(a - 4)(2a + 1)$ |
| 5º) $ax(a - x)^2(a + 2x)$ | 6º) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + a + 1)$ |

- 7º) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$ 8º) $b^3(b-1)(b^2+b+1)$
 9º) $(a+b+c)(a-b-c)(b-a-c)$
 10º) $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
 11º) $(x+y)^2(x-y)^2$
 12º) $a(a-2)(a+3)(a^2+2a+4)$
 13º) $3(a+2)(a+b)(a+c)(a-c)$
 14º) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)$
 15º) $(x-2y)(x-3y)(x-4y)$
 16º) $a(a-1)(a+2)(a^2+2a-12)(a^2-2a+4)$
 17º) $(a+1)(a-1)^2(a+3)^2(a-3)$
 18º) $x^2y^2(x+2y)(x+y)(x-y)$
 19º) $(x-5)(2x^2-5x+1)^2$
 20º) $x^3(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

EJERCICIO 75.

- 1º) $(x^2+x-1)(x^2+x-2)(x^2+x-3)$
 2º) $(x^2-2x+2)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
 3º) $(x^2+3x-2)(x^2-3x+1)(x^2-3x-1)$
 4º) $(x-1)(3x^2-x-2)(3x^2+2x+1)$
 5º) $(x^2-x+1)(x^3+x^2-x+3)(x^2+3x+3)$
 6º) $(x-2)(x^2-5x+5)(x^3+x-1)$
 7º) $(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)(x^2-x+2)$
 8º) $(x^3+x^2+1)(x^2-x+1)(x^3-x+1)$
 9º) $(x-1)(x+1)(2x-1)(x^2-6x+6)$
 10º) $(x-2)(3x+1)(x^2-3x+1)(x^2+x+1)$.

EJERCICIO 76.

- 1º) $6ab$; $720a^3b^3c^3$ 2º) $5ab$; $300a^2bxyz$
 3º) $5m^2n^2$; $180m^4n^3st^2$ 4º) $2x(a+b)$; $24x^2y(a+b)^3$
 5º) $3(2x-y)$; $45a^2b^2(2x-y)^3$
 6º) $x(x+1)(x-1)$; $x(x^2+1)(x+1)^2(x-1)^2$
 7º) $x+3$; $(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)$
 8º) x^2-7x+7 ; $(x+2)(x-3)(x^2-7x+7)$
 9º) 1 ; $(x^3+x+1)(x^3-x^2+1)$

- 10º) $x + y; x^8(x^2 + y^2)(x + y)^2(x - y)^2$
 11º) $x - 4y; (x - 2y)(2x - y)(x - 3y)(x - 4y)$
 12º) $a(a - 2); a^3(a - 2)^2(a + 2)(a^2 + 2a + 4)$
 13º) $x - 2y + 3z; (x - 2y + 3z)(x + 2y - 3z)(x + 2y - z)$
 14º) $x + 4y; (x + 4y)^2(3x - y)(2x + 3y)$
 15º) $x^2 - 4x + 2; (2x + 1)(x + 2)(x^2 - 4x + 2)$
 16º) $x^2 + 6x - 4; (3x + 2)(x^2 + x + 1)(x^2 + 6x - 4)$
 17º) $y^2 - 9y + 9; (y^2 + y + 1)(y^2 + 2y + 2)(y^2 - 9y + 9)$
 18º) $(x - 2)(2x - 3)(2x + 1); (x - 2)(2x - 3)(2x + 1)(3x - 1)$
 19º) $x(x^2 - x + 1); x^2(x + 1)(x^2 - x + 1)^2(x^2 + x + 1)$
 20º) $x^3 - x^2 + 1; (x^2 + x - 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^3 - x^2 + 1).$

EJERCICIO 77.

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 1º) $2a^2 / 5b^2$ | 2º) $2c / 3a^2$ |
| 3º) $5xy^2 / 8z^2$ | 4º) $-2np / 5m$ |
| 5º) $-3a^6xy / 4b^3$ | 6º) $7p^3t^2 / 6q^2$ |
| 7º) $7c / 3ab^5$ | 8º) $2yz / 3$ |
| 9º) $a^3 / (b - c)^2$ | 10º) $1 / x(y + z)$ |
| 11º) $c / (5a + b)$ | 12º) $x / 2y$ |
| 13º) $(a + b) / (a - b)$ | 14º) $3b / 5a$ |
| 15º) $-x / (b + a)$ | 16º) $4x / (x + 2)$ |
| 17º) $(3z + a) / (2x - y)$ | 18º) $ab(a + 3b)$ |
| 19º) $(x^2 + 3x + 9) / (x + 3)$ | 20º) $(x - 2) / (x - 6)$ |
| 21º) $(3x + 5) / (2x + 3)$ | 22º) $(x^3 + 6) / (x^2 + x + 1)$ |
| 23º) $(x^2 + 3) / (x^2 + 4)$ | 24º) $(a - b) / (a^2 - ab + b^2)$ |
| 25º) $(a^2 + b^2) / (a^2 - ab + b^2)$ | 26º) $-(x - a - 1) / (a - 1 + x)$ |
| 27º) $(x + 1 - y) / (x - y - 1)$ | 28º) $(a + 2b + 1) / (a + 1)$ |
| 29º) $(a + c - b) / (a + b - c)$ | |
| 30º) $(x + y - m - n) / (m + x - n - y)$ | |
| 31º) $-(x + y) / (x - y)$ | 32º) $(5x + 2) / (x^2 + 2x + 5)$ |
| 33º) $1 / (x + 4)$ | 34º) $(x - 2) / (x + 3)$ |
| 35º) $(x - 1)^2 / (x^2 - 3x + 1)$ | 36º) $(2x - 1) / (x^2 + 1)$ |
| 37º) $(a + 1) / (a^2 + 2a + 2)$ | 38º) $(b + 3) / (b + 2)$ |
| 39º) $(x + 2) / (x^2 - x - 9)$ | 40º) $(x^2 + x + 2) / (x^2 + x + 4).$ |

EJERCICIO 78.

- 1º) $2c/abc, 3a/abc$
- 2º) $bx/a^2b^2, ay/a^2b^2$
- 3º) $5x/x^2y^2, axy/x^2y^2, by^2/x^2y^2$
- 4º) $3b(a-b)/12ab, 2(a+b)/12ab$
- 5º) $4ay/24x^2y, 3bcxy/24x^2y, 8cx/24x^2y$
- 6º) $a^2/a^3x^2, 2x/a^3x^2, 3a/a^3x^2$
- 7º) $y(x+y)/3x^3y^5, 6x^2y^2/3x^3y^5, -9x^2/3x^3y^5$
- 8º) $abc^2xy/a^2b^2c^3, b^2c^2yz/a^2b^2c^3, a^2xz/a^2b^2c^3$
- 9º) $2(x-2)/(x+1)(x-2), 3(x+1)/(x+1)(x-2)$
- 10º) $(a+1)/(a^2-1), 2/(a^2-1)$
- 11º) $6/2(x-3), 1/2(x-3)$
- 12º) $a/(a^2-x^2), x(a-x)/(a^2-x^2)$
- 13º) $(1+x)/(1-x^2), x(1-x)/(1-x^2), x^2/(1-x^2)$
- 14º) $a(a+1)^2/(a+1)^3, (a+1)/(a+1)^3, a^2/(a+1)^3$
- 15º) $(x-1)/(x-1)(x-3)(x-4), (x-3)/(x-1)(x-3)(x-4)$
- 16º) $(x-1)/(x-1)(x+3)(x-3), 2(x+3)/(x-1)(x+3)(x-3)$
- 17º) $(x+6y)/(x-3y)(x+6y), 1/(x-3y)(x+6y),$
 $(x-3y)/(x-3y)(x+6y)$
- 18º) $(c-a)/(a-b)(b-c)(c-a), 2(a-b)/(a-b)(b-c)(c-a),$
 $3(b-c)/(a-b)(b-c)(c-a)$
- 19º) $ay(xy-1)/xy(xy-1)^2, bx(xy-1)/xy(xy-1)^2,$
 $cxy/xy(xy-1)^2$
- 20º) $y(x^3-y^3)/xy(x^3-y^3), x(x^3-y)/xy(x^3-y^3),$
 $xy(x+y)(x^2+xy+y^2)/xy(x^3-y^3), 2xy/xy(x^3-y^3).$

EJERCICIO 79.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1º) $3/a$ | 2º) x/b |
| 3º) $17a/12$ | 4º) $-x/6$ |
| 5º) $(2a^2+4a-5)/a^3$ | 6º) $(3x-4x^2+2)/x^3$ |
| 7º) $(15a^2+8a-3)/10a^3$ | 8º) $(ay^2-bxy+cx^2)/x^2y^2$ |
| 9º) $(2z+3x-5y)/xyz$ | 10º) $(x^4-3xy+y^4)/x^2y^2$ |
| 11º) $-(3x+10)/12$ | 12º) $(12x^2+5x-4)/8x^2$ |
| 13º) $(x^2-2xy+3y^2)/x^3y^3$ | 14º) $(x^2y+y^2z+z^2x)/xyz$ |

- 15º) $(1 - 4x)/(1 - x^2)$ 16º) 0
 17º) $-3xy/(x^2 - y^2)$ 18º) $(x^2 - 3xy - 3y^2)/(x^2 - y^2)$
 19º) $(x^2 - x - 5)/(x^3 + 1)$ 20º) $-2t^3/(1 + t^2 + t^4)$
 21º) $4/(m - 1)(m - 2)$
 22º) $(-4x + 21)/(x - 6)(x - 7)(x - 8)$
 23º) $y(3x + y)/(x^2 - y^2)$
 24º) $16x^2/(x^2 - 1)(x^2 - 9)$
 25º) $48a^3/(x + a)(x + 3a)(x + 5a)(x + 7a)$
 26º) $2x(a^2 - b^2)/(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)$
 27º) $(x^2 - 6)/(x - 1)(x - 2)(x - 3)$
 28º) $3(2x - 3)/(x^2 - 4)(x^2 - 9)$
 29º) $(m + n - 2)/2(m + n)$
 30º) $-(a + c)/(a - c)(b - c)$
 31º) $(-3x + 5y - 2z)/(x - y)(y - z)(z - x)$
 32º) 1 33º) $1/abc$ 34º) $1/c(b - c)(c - a)$
 35º) 1 36º) $a + b + c$ 37º) 0
 38º) 1 39º) d 40º) 0.

EJERCICIO 80.

- 1º) $x^2/(x - 1)$ 2º) $-3/(x - 2)$
 3º) $2x^2/(x - y)$ 4º) $2ab/(a + b)$
 5º) $(y^2 - 3y - 2)/(y + 1)$ 6º) $-(2a + b)/3$
 7º) $(x^3 + y^3)/(x - y)$ 8º) $2ax/(a + x)$
 9º) $xy/(x + y)$ 10º) $-x^3/(2 - x)$
 11º) $2x - 6 + 5/x$ 12º) $x + 2 - 8/5x$
 13º) $x - 10 + 13/(x + 1)$ 14º) $3x + 13 + 18/(x - 2)$
 15º) $a^2 + ab + b^2 + 2b^3/(a - b)$ 16º) $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$
 17º) $a + b$
 18º) $x + 7 + (4x - 26)/(x^2 - x + 3)$
 19º) $a^2 + ab + b^2$
 20º) $2x - 3 + (-3x + 1)/(x^2 + x - 1)$.

EJERCICIO 81.

- 1º) $2a/b$ 2º) $5/4x$
 3º) $4n$ 4º) $9/5x^2$

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| 5º) $-3ac/5b$ | 6º) $m(x+2)/x$ |
| 7º) a | 8º) $2(x^2+y^2)$ |
| 9º) 1 | 10º) $(b+a)/b$ |
| 11º) $2x(x+y)$ | 12º) $(x^2-xy+y^2)/(x-y)$ |
| 13º) $(a^2+b^2)/a$ | 14º) $(x+a)/(x-a)$ |
| 15º) 2 | 16º) x |
| 17º) $a/(a-1)^2$ | 18º) $ab/c(a+c-b)$ |
| 19º) $(x+y-z)/(x-y+z)$ | 20º) $2(m+1)/(4m-3)$ |
| 21º) $(x+2)/(x+1)$ | 22º) $(x-1)/(x+2)$ |
| 23º) $-2(x^2+xy+y^2)/(x+y)$ | 24º) $(x+5)/(x-10)$ |
| 25º) 1 | 26º) $(2a+3)/(3a+1)$ |
| 27º) 1 | 28º) $(c^2+6c+5)/c$ |
| 29º) $x^2/(x+y)$ | 30º) $a+b$ |

EJERCICIO 82.

- | | |
|--------------------|-------------------------|
| 1º) $2ac/b$ | 2º) $2ab/3x$ |
| 3º) $5az/4b$ | 4º) m^2n^3p/aq |
| 5º) $32mx^4/5yz^5$ | 6º) $2z$ |
| 7º) $5a/2c(a-c)$ | 8º) $3a/(a^2+ab+b^2)$ |
| 9º) $(x^2+a^2)/x$ | 10º) $(x^2-12x+27)/x^2$ |
| 11º) $(x-5)/(x-4)$ | 12º) $(c-a-b)/(c-a+b)$ |
| 13º) $(h^2-1)/h^2$ | 14º) $(a-b-c)/(a+b-c)$ |
| 15º) 1 | 16º) $(b-1)/b^2$ |
| 17º) $x-2y$ | 18º) a |
| 19º) 1 | 20º) $2/x$ |

EJERCICIO 83.

- | | |
|------------------------------------|-------------------|
| 1º) $x-2$ | 2º) x/y |
| 3º) $-m/z$ | 4º) $(a-b)/(a+b)$ |
| 5º) $(a+b)/(a-b)$ | 6º) 1 |
| 7º) $a^2(a+b)/b^2$ | 8º) $(x-y)^2$ |
| 9º) $(1+x)/2$ | |
| 10º) $(yz+xz+xy)/(x^2z+xy^2+yz^2)$ | |
| 11º) 1 | 12º) 1 |

13º) $1/(2x^2 - 1)$

14º) $2(x - 4)$

15º) 1

16º) $(x^2 + 2ax - a^2)/(x^2 + a^2)$

17º) $(a^2 + b^2)/2ab$

18º) 2

19º) $(a^2 + 1)/a^3$

20º) $(7b - 11a)/(3b - 4a)$

21º) $-x$

22º) $2(a^2 - a + 1)/(2a - 1)$

23º) $a^2/(a^2 + 1)$

24º) $(3 - x + x^2)/3$

25º) $-xy/(x^2 + xy + y^2)$

27º) $-x^2y^2/(x - y)^2$

26º) $(x + y)^2/(x^2 + xy + y^2)$

28º) $(b + c - a)/(a + c - b)$

29º) $(x - 1)^2/x$

30º) -8 .

EJERCICIO 84.

1º) 0

2º) 0

3º) no tiene

4º) 0

5º) no tiene

6º) no tiene

7º) ind.; 4/3

8º) ind.; 1/2

9º) ind.; 7/3

10º) ind.; no tiene

11º) 0

12º) ind.; no tiene

13º) no tiene

14º) ind.; no tiene

15º) no tiene.

EJERCICIO 85.

I.

1º) $-2a/3b^4c$

2º) $2y^2z^2/3x^2t^3$

3º) $(a + 5b)/(a + 3b)$

4º) $y/(x + y)$

5º) $(a^2 + ab + b^2)/(a + b)$

6º) $(a + x - b - y)/(a + y - b - x)$

7º) $(x^3 - x^4y^4 + y^8)/(x + y)$

8º) $1/(a + 1)(a - 1)$

9º) $(x - 3)/(x + 1)(x - 2)$

10º) $(a - 1)/(a^2 - a + 1)$

II.

1º) $2z^3/6x^3y^2z^3, -3x^3/6x^3y^2z^3, 5xy^2z/6x^3y^2z^3$

2º) $a(a - b)/(a^2 - b^2), -b(a + b)/(a^2 - b^2), a^2/(a^2 - b^2)$

3º) $(2x - y)/(2x - y)(x + 3y)(x - 4y),$

$2(x - 4y)/(2x - y)(x + 3y)(x - 4y)$

4º) $(x - z)/(x - y)(y - z)(x - z), (x - y)/(x - y)(y - z)(x - z),$

$-(y - z)/(x - y)(y - z)(x - z)$

5º) $x(x^3 + y^3)/(x^6 - y^6), y(x^3 - y^3)/(x^6 - y^6),$

$(x - y)(x^3 + y^3)/(x^6 - y^6), (x + y)(x^3 - y^3)/(x^6 - y^6)$

III.

1º) $-17/10$

2º) $2/(1+x)$

3º) $-5/(9a^2-1)$

4º) $2a/(a^2-b^2)$

5º) $(-2x+5)/(x^3-1)$

6º) $2/(x-4)(x-5)$

7º) $-6a^2/(a^2-1)(a^2-4)$

8º) $(-3b+2)/(b-2)(b-3)(b-4)$

9º) $8x^8/(x^8-y^8)$

10º) 2

IV.

1º) $5(x+1)/2$

2º) $y^2/3x$

3º) $3y(x+y)/(x+2y)$

4º) $1/(1-a)$

5º) $1/(1+x)$

V.

1º) $2a^2-1+5/2a$

2º) $x^2-x+2-7/(x+2)$

3º) $x^2+xy+y^2+y^3/(x-y)$

4º) $x^2-2xy+y^2$

5º) $x^2+x-x/(x^2-x+1)$

VI.

1º) $-7a^2x/cy^4$

2º) $(a+b)/b$

3º) $x/(x-3)$

4º) $x(2x-y)/(x+2y)$

5º) a^2-b^2

VII.

1º) $4a^2c^2yz/3bx$

2º) $x^2/(a+x)$

3º) $(c^2+1)(c+1)/(x+1)$

4º) $(x+y-z)^2/(x-y-z)^2$

5º) $(a+y-x-z)(a+x+y-z)/(a+x-y-z)(a-y-x-z)$

VIII.

1º) $a/(a+1)$

2º) $-4(x+a)$

3º) $4mn/(m-n)^2$

4º) $2/ab$

5º) $-(x+y+z)^2/2xy$

IX.

1º) b/a

2º) $2(x-1)(x+2)/(x+3)$

3º) $4/(x^2+10)$

4º) $(m+n)/(m-n)$

5º) $x^2y^2(x+y)/(x^4+y^4)$

6º) $a/(a+x)$

7º) $(x+y)(x-y)^2/xy^2$

8º) $(x+y)(x^2+xy+y^2)/xy$

9º) $(5a+2)/(2a+1)$

10º) $x+y+z$

X.

1º) 0

2º) no tiene

3º) ind.; $5/2$

4º) ind.; $8/11$

5º) ind.; 0.

REPASO GENERAL. (CAPÍTULOS 1-10).

1º) 0

2º) $-20/3$

3º) $A = 2(ab + ac + bc)$

4º) $12\,057,6\text{ cm}^3$

5º) a) frac., b) frac., c) frac., d) entera

6º) $3x^2 + 3xy - 2y^2 + z^2 + 4yz + 3xz$

7º) $-4x^4y + 8x^2y^3 - xy^4$

8º) $11a^4 - 4a^3x + 20a^2x^2 + 5ax^3$

9º) $4b - 16x$

10º) $(ax - cx - b^2x) - (by - a^2y - c^2y)$

11º) $-x^6 + 7x^5y - 15x^4y^2 + 25x^3y^3 - 25x^2y^4 - 3xy^5 + 10y^6$

12º) $x^{3n+2} - 2x^{3n+1} + x^{3n} - 23x^{3n-1} + 8x^{3n-2} - 30x^{3n-3}$

13º) $3x^2y^4 + 5xy^2 - 6$

14º) $x^{2m} + 2x^m y^n - y^{2n}$

15º) -03

16º) 525 km/h

17º) 42, 37, 7

18º)

a) $9a^2 - b^2$

b) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

c) $b^2 + 5b - 66$

d) $8x^2 + 14x - 15$

e) $8a^3 + 12a^2x + 6ax^2 + x^3$

f) $x^3 + 27$

19º)

a) $3a - x$

b) $x^2 - 1$

c) $a^2 + 3a + 9$

d) $49b^2 - 7b + 1$

20º)

a) $(9a^2 + 2 + 5a)(9a^2 + 2 - 5a)$

b) $(y - 2)(y + 2)(y^2 - 2y + 4)$

c) $6x(x + 2y)(2x^2 + x + 5)$

d) $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1)$

e) $c(c - x^3)(c^2 + cx^3 + x^6)$

f) $(x - a)(x - 3a - y)$

g) $(ab - c^2)(ab + c^2)(a^2b^2 + abc^2 + c^4)(a^2b^2 - abc^2 + c^4)$

21º)

a) $2x - 5; (2x - 5)^2(x + 3)(x + 2)$

b) $1; x^2(x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

22º) $b(a - 2x)/a(a - 6x)$

23º) $(x - 3)/(x^2 + x + 1)$

24º)

a) $-(x + y)^2/y^2(y^2 - 1)$

b) $(1 + y)/x^2(1 + x)$

c) $3(a + 7)/2(2a - 1)$

d) $(m - 3)/4$

e) $1/a$

25º)

a) x

b) $-(2h + 1)/2$

26º)

a) F

b) F

c) F

d) V

e) F

f) F

g) F

h) F

i) F

j) V

h) F

l) F

m) F

n) V

60º) F

EJERCICIO 86.

1º) 12

2º) 8

3º) 2

4º) -4

5º) 18

6º) 24

7º) 7/3

8º) 2

9º) 1/2

10º) 2

11º) 5

12º) -1

13º) 5

14º) 3

15º) 6

16º) 4

17º) 3

18º) 1

19º) 3

20º) -1

21º) 4/5

22º) 4

23º) no tiene

24º) $2\frac{5}{8}$

25º) -1/5

26º) 0

27º) 8

28º) 3

29º) 6

30º) 0

EJERCICIO 87.

1º) 3

2º) 2

3º) 3,9

4º) 1

5º) $-\frac{1}{2}$

6º) 3

7º) -2

8º) 4

9º) 5	10º) - 1	11º) - 3	12º) 6
13º) 7	14º) 0	15º) 1/7	16º) - 3,5
17º) 4,5	18º) 0,5	19º) 5	20º) - 6.

EJERCICIO 88.

1º) 40	2º) 30	3º) 28	4º) 90
5º) 1/4	6º) 5/3	7º) 11/15	8º) 2
9º) 3	10º) 3	11º) $3\frac{3}{7}$ d	12º) 6 d
13º) $1\frac{1}{3}$ d	14º) $7\frac{1}{5}$ d	15º) $14\frac{2}{7}$ h	16º) 16 m 48 s
17º) 9 h	18º) 1 h 6 m 40 s	19º) 2 h 24 m	20º) 5 m

EJERCICIO 89.

1º) 120 km; 10 h	2º) 195 km; 3 h
3º) 1 200 millas; 12 m	4º) 495 km
5º) 495 km; 10 p m	6º) 1 300 millas; 20 h
7º) $16\frac{2}{3}$ km	8º) 3,6 km
9º) 40 km/h	10º) 1 550 millas
11º) 4 h $21\frac{9}{11}$ m	12º) 10 h $54\frac{6}{11}$ m
13º) 6 h $32\frac{8}{11}$ m	14º) 3 h $49\frac{1}{11}$ m
15º) 8 h $10\frac{10}{11}$ m	16º) 11 h $27\frac{3}{11}$ m
17º) 5 h $10\frac{10}{11}$ m	18º) 7 h $21\frac{9}{11}$ m
19º) 7 h $54\frac{6}{11}$ m	20º) 2 h $27\frac{3}{11}$ m; 3 h
21º) 12 km/h	22º) 4 km/h
23º) 5 km/h	24º) 465 millas por hora
25º) 18 millas por hora.	

EJERCICIO 90.

[Las soluciones que se indican no son válidas para los valores particulares de las letras que anulen algún denominador].

1º) $5b/a$

3º) $a + 2b$

5º) $-a/(a + 2)$

7º) $ab/(a - 2b)$

9º) $b(a + b)/(b - a)$

11º) $-a/b$

13º) $amnp/(np + mp - mn)$

15º) $(a^2 - b^2)/(7a + 3b)$

17º) $k(m^2 + k^2)/m(m^2 - k^2)$

19º) $a/(1 - a)$

21º) $ab/(a - b)$

23º) 0

25º) $a(3a + 2b - c)/2(a + b)$

27º) $4a$

29º) 1

2º) $(b - c)/(a - 1)$

4º) $(b^2 + c^2)/2b$

6º) $-ab/(2a + b)$

8º) $1/3$

10º) $(a^2 + b^2)/4a$

12º) b^2/a

14º) $3a/b$

16º) $(4a^2 + b^2)/(3b - 8a)$

18º) $c(a - c)/(a^2 + ac - 2c)$

20º) $a + b$

22º) a

24º) $-a/2b$

26º) $c(4 - a)/(2a^2 + c^2)$

28º) 1

30º) 0.

EJERCICIO 91.

1º) $(s + d)/2, (s - d)/2$

2º) $s/(k + 1), ks/(k + 1)$

4º) $(bh - am - ah)/(a - b), (bh - bm - ah)/(a - b)$

5º) $abc/(bc + ca + ab)$

7º) $vd/(v + v')$

9º) Dentro de $12m/11$ min.

3º) $(p - kq)/(k + 1)$

6º) $hkm/(km + hm - hk)$

8º) $(k + k')v/(k - k')$

10º) Dentro de $12(m + n)/11$ min.

EJERCICIO 92.

1º) $m = Fr^2/km'$

3º) $l = \frac{2s}{n} - a$

5º) $v_0 = \frac{e - \frac{1}{2}gt^2}{t}$

2º) $h = 3V/\pi r^2$

4º) $n = \frac{l - a}{d} + 1$

6º) $t = \frac{v - v_0}{av_0}$

$$7^\circ) \quad r' = \frac{l - \pi sr}{\pi s}$$

$$8^\circ) \quad r = \frac{E - iR}{i}$$

$$9^\circ) \quad v = \frac{u}{1 - u}$$

$$10^\circ) \quad r = \frac{s - a}{s - l}$$

$$11^\circ) \quad r^2 = \frac{Rr_1}{r_1 - R}$$

$$12^\circ) \quad R = \frac{2E - ir}{2i}$$

$$13^\circ) \quad b = \frac{R}{2(a + R)}$$

$$14^\circ) \quad r' = \frac{ir}{1 - i}$$

$$15^\circ) \quad R = \frac{(n-1)pp'R'}{p'R' + pR' - (n-1)pp'}$$

EJERCICIO 93.

I.

- | | | | |
|----------------------|-----------------|------------|----------|
| 1º) 12 | 2º) 24 | 3º) 6 | 4º) 2 |
| 5º) 5 | 6º) 1 | 7º) 2 | 8º) 3 |
| 9º) -1 | 10º) 3 | 11º) 2 | 12º) 0,5 |
| 13º) 3 | 14º) -2 | 15º) 0 | 16º) -3 |
| 17º) 0 | 18º) 4 | 19º) a | |
| 20º) $abc/(a+b+c)$ | 21º) a | 22º) $a+b$ | |
| 23º) $(4a+c)/2$ | 24º) $-(a+b)/2$ | | |
| 25º) $a^2 - 6a + 10$ | | | |

II.

- | | |
|--|-----------------------------|
| 1º) 100 | 2º) 7/12 |
| 3º) 300 \$ | 4º) 75 ohmios; 450 ohmios. |
| 5º) 6 horas | 6º) 45 km. |
| 7º) $6\frac{2}{3}$ días | 8º) 1,5 horas |
| 9º) $6\frac{2}{3}$ horas | 10º) 2 a m (día sgte.) |
| 11º) $234\frac{2}{3}$ km; 4 h 56 m p m | 12º) 48 y 64 km/h |
| 13º) 6 h $32\frac{8}{11}$ m | 14º) 1 h $38\frac{2}{11}$ m |
| 15º) 2 h $27\frac{3}{11}$ m | 16º) 6 km/h |

- 17°) 21 km/h 18°) 1 km
 19°) 1 200 km 20°) 16 km/h
 21°) $(ak + bm - bk)/(a - b)$ 22°) $bc/(b - c)$
 23°) $bh/(v' - v)$ 24°) $12(30 - b)/11 \text{ min.}$
 25°) $(k - k')v/(k + k')$

III.

- 1°) $r = n(E - IR)/I$ 2°) $m = nM/(v - n)$
 3°) $l = [s(r - 1) + a]/r$ 4°) $g = (s - \pi r^2)/\pi r$
 5°) $v = cuw/(au - bw)$ 6°) $r = (3V + \pi h^3)/3\pi h^2$
 7°) $B' = [3V - h(B + 4B'')]/h$ 8°) $d = 2(s - an)/n(n - 1)$
 9°) $v_0 = (wv_1 - gQ)/w$ 10°) $n = 2 + (\theta r^2 - A)/\pi r^2$
 11°) $a = 4$ 12°) $R = 7$
 13°) $r_1 = 8$ 14°) $p' = 43,2$
 15°) $r = 4,5$

EJERCICIO 95.

- 1°) $d = 60t$ 2°) $C = 0,32 \$$ 3°) $A = f^2$
 4°) $A = \pi r^2$ 5°) $S = 120h$ 6°) $p = 100 + 5n$
 7°) $P = 2b + 2h$ 8°) $h = 2A/b$ 9°) $i = 1\,200\,000rt$
 10°) $P = nI$ 11°) a) 3, b) -5, c) -1, d) 7
 12°) a) 2, b) 7, c) 4, d) 0
 13°) a) 1, b) 2, c) 5, d) $a^2 + 1$
 14°) a) 3, b) 2, c) -1, d) $6/a$
 15°) a) $2/5$, b) $-1/2$, c) 0, d) $-1/5$
 16°) a) $y = 8 - 2x$, b) $x = 4 - 0,5y$
 17°) a) $y = 2x - 4,5$, b) $x = 0,5y + 2,25$
 18°) a) $V = k/P$, b) $P = k/V$
 19°) $t = 0,2e - 2$ 20°) $h = S/2\pi r$

EJERCICIO 96.

- 41°) $y = 5x$; 15 42°) $y = 05x$; 3
 43°) $y = 4x$; 20 44°) $e = 10t$; 100 m
 45°) $F = 8x$; 16 lb 46°) $y = 6/x$; 1,5

- 47º) $y = -8/x$; $-1,5$ 48º) $v = 2\,000/p$; 200 cm^3
 49º) $N = 10.000/l$; 250 vib./seg. 50º) $y = 2x^2$; 18
 51º) $y = 0,2x^2$; 20 52º) $S = 6x^2$; 54 cm^2
 53º) $d = 8t^2$; 32 pies 54º) $y = 1,2/x^2$; $0,075$
 55º) $y = 10/x^2$; $0,4$ 56º) $F = 6,4/x^2$; $0,71\text{ g}$
 57º) $R = 0,8/D^2$; 5 ohmios 60º) $z = kx$.

EJERCICIO 97.

- 1º) $F = kLr$ 2º) $R = kM/s$ 3º) $V = \pi r^2 h$
 3º) $V = xyz$ 5º) $t = kpq/r$ 6º) $t = kpq/r^2$
 7º) $u = kxy^3$ 8º) $R = ku^2/v$ 9º) $R = k\sqrt{x/yz}$
 10º) $H = kx^2/r^3$ 11º) $r = kL/d$ 12º) $R = kl/d^2$
 13º) $F = kAv^2$ 14º) $v = kT/p$ 15º) $p = kDT$
 16º) $H = kvd^3$ 17º) $P = 62,4Ah$; 3.744 lb
 18º) $I = kw/d^2$ 19º) $F = 9v^2/r$; 300 20º) $P = kab^2/L$

EJERCICIO 102.

- 1º) $A = 2x^2$
 2º) $V = 4\pi r^3$
 3º) $C = 80 + 0,08x$
 4º) $C = 10 + 20x$
 5º) $V = 4x^3 - 100x^2 + 600x$
 6º) a) 17 , b) -13 , c) -3
 7º) a) -2 , b) -1 , c) 13
 8º) a) 3 , b) $0,5$, c) $a/(a-2)$,
 9º) $a = 2$
 10º) a) $y = 3x - 2$, b) $x = (y + 2)/3$
 11º) a) $y = -2/x$, b) $x = -2/y$
 12º) a) $y = (3 - x)/(x - 1)$, b) $x = (y + 3)/(y + 1)$
 41º) $y = \frac{1}{3}x$; 4 42º) $y = 1,5x$; $-4,5$
 43º) $F = 2,5x$; $7,5\text{ lb}$ 44º) $y = 100/x$; 25
 45º) $u = -45/z$; -5 46º) 15
 47º) $I = 320/R$; $3,2\text{ amp}$ 48º) $y = 8x^2$; 128

- 49º) $C = v^2 / 625$; 2,56 ton 50º) $y = 20 / x^2$; 1,25
 51º) 320 bujías 52º) $u = k / x$ 53º) $Z = ku / h$
 54º) $S = krg$ 55º) $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ 56º) $F = km l / r$
 57º) $G = kL / v^2$ 58º) $H = kmt^3$ 59º) $P = k \sqrt{u/v}$
 60º) $Q = kux / yz$ 61º) 768 \$ 62º) 31,25 lb
 63º) 9,02.

EJERCICIO 103.

- 1º) $x = 19$, $y = 11$ 2º) $x = 1$, $y = 6$
 3º) $x = 1$, $y = 2$ 4º) $x = 2$, $y = 3$
 5º) $x = 3$, $y = 5$ 6º) $x = 5$, $y = 4$
 7º) $x = -2$, $y = 4$ 8º) $x = 3$, $y = 6$
 9º) $x = 8$, $y = 7$ 10º) $x = -1$, $y = 2$
 11º) $x = 10$, $y = 4$ 12º) $x = -3$, $y = 3$
 13º) $x = 3$, $y = 11$ 14º) $x = 6$, $y = 8$
 15º) $x = 3$, $y = 1$ 16º) $x = 36$, $y = 30$
 17º) $x = 10$, $y = 20$ 18º) $x = 6$, $y = 9$
 19º) $x = 1/5$, $y = 1/4$ 20º) $x = 1/10$, $y = 1/3$.

EJERCICIO 104.

- 1º) $x = 4$, $y = -1$ 2º) $x = -2$, $y = 3$
 3º) $x = 5$, $y = 4$ 4º) $x = 1/2$, $y = 1/3$
 5º) $x = 1$, $y = -2$ 6º) $x = 20$, $y = 6$
 7º) $x = -3$, $y = -3$ 8º) $x = 8$, $y = 2$
 9º) $x = 1/5$, $y = 1/6$ 10º) $x = 6$, $y = 5$
 11º) $s = 7$, $t = -4$ 12º) $u = 1$, $v = 10$.

EJERCICIO 105.

- 1º) $x = 6$, $y = 4$ 2º) $x = 6$, $y = 3$
 3º) $x = 2$, $y = 2$ 4º) $x = -1$, $y = 3$
 5º) $x = 3$, $y = -2$ 6º) $x = 5$, $y = 5$
 7º) $x = 1,5$, $y = 2$ 8º) imp.

9º) $x = -2, y = -4$

11º) $x = 1,2, y = 3,4$

13º) $x = -3, y = 2,5$

15º) $x = -2, y = -3$

17º) $x = 5, y = -1$

19º) $x = 2,5, y = 2,5$

10º) $x = 1, y = 5$

12º) ind.

14º) imp.

16º) ind.

18º) $x = -4, y = 2$

20º) $x = 10, y = 8.$

EJERCICIO 106.

1º) $x = 5, y = 2$

3º) $x = 6, y = -4$

5º) $x = 4, y = 4$

7º) $x = 10, y = 4$

9º) $x = 7, y = 6$

11º) $x = -3, y = 8$

13º) $x = 1/4, y = 1/5$

15º) $x = 2, y = 3$

17º) $x = 3/4, y = 4/5$

19º) $x = 1/3, y = 1/4$

21º) $x = 2, y = 1/3$

2º) $x = 8, y = 6$

4º) $x = 3, y = -2$

6º) $x = -1, y = 3$

8º) $x = 1/5, y = 1/3$

10º) $x = 2, y = -1$

12º) $x = 10, y = 20$

14º) $x = 1/3, y = -1/2$

16º) $x = 5, y = 6$

18º) $x = 1/10, y = 1/15$

20º) $x = 1, y = 3$

22º) $x = 2, y = 4.$

EJERCICIO 107.

1º) $x = (m+n)/2, y = (m-n)/2$

2º) $x = k/a, y = 0$

3º) $x = (b+3c)/(3a+2b), y = (2c-a)/(3a+2b)$

4º) $x = (b+ac)/(2a+1), y = (2b-c)/(2a+1)$

5º) $x = (3b+2d)/(ad+bc), y = (3a-2c)/(ad+bc)$

6º) $x = (7a-3b)/29, y = (3a+7b)/29$

7º) $x = a, y = b$

8º) $x = (mn-p)/(m^2-1), y = (mp-n)/(m^2-1)$

9º) $x = b, y = a-b$

10º) $x = a+b, y = a$

11º) $x = -c, y = -d$

12º) $x = 2(a-b), y = a+b$

13º) $x = (an - bm)/(cn - bp)$, $y = (an - bm)/(ap - cm)$

14º) $x = a - c$, $y = a - c$

15º) $x = m/(m - n)$, $y = -n/(m + n)$

16º) $x = ab/2(a + b)$, $y = ab/2(a - b)$

EJERCICIO 108.

1º) $x = 3$, $y = 5$, $z = 7$

2º) $x = 4$, $y = 2$, $z = -1$

3º) $x = -2$, $y = 2$, $z = 1$

4º) $x = 5$, $y = 1$, $z = 2$

5º) $x = 1/2$, $y = 0$, $z = 3$

6º) $x = 10$, $y = 20$, $z = 30$

7º) $x = 5$, $y = -10$, $z = 15$

8º) $x = y = z = 2,5$

9º) $x = 5$, $y = 6$, $z = 7$

10º) $x = 12$, $y = 4$, $z = -6$

11º) $x = 1/2$, $y = 1/3$, $z = 1/4$

12º) $x = -8$, $y = 5$, $z = 10$

13º) $x = 6$, $y = 2$, $z = -1$

14º) $x = 0,1$, $y = 0,2$, $z = 0,3$

15º) imp.

16º) ind.

17º) $x = 6$, $y = 12$, $z = 8$

18º) $x = 20$, $y = 16$, $z = 24$

19º) $x = 4$, $y = 6$, $z = -6$

20º) $x = 2/3$, $y = 3/4$, $z = 4/5$

21º) $x = 1/3$, $y = 1/4$, $z = 1/5$

22º) $x = 1/6$, $y = 1/4$, $z = -1/2$

23º) $x = 5$, $y = 4$, $z = 3$

24º) $x = -2$, $y = 6$, $z = 7$

25º) $x = a$, $y = a$, $z = 1$

26º) $x = a$, $y = b$, $z = c$

27º) $x = b$, $y = -a$, $z = -c$

28º) $x = a + b$, $y = b$, $z = 0$

29º) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $u = 4$

30º) $x = 5$, $y = -3$, $z = 4$, $u = -2$.

EJERCICIO 109.

1º) $ad - bc$

2º) $10 + pq$

3º) $3A - 2B$

4º) $A^2 + B^2$

5º) 8

6º) 7

7º) -2

8º) 37

9º) 0

10º) 2

11º) -2

12º) $1/60$

13º) $x = 2$, $y = 3$

14º) $x = 4$, $y = -1$

15º) $x = -3$, $y = -6$

16º) $x = 5$, $y = 10$

17º) $x = 1,5$, $y = -0,5$

18º) $x = 6$, $y = -5$

19º) $x = 7$, $y = -2$

20º) $x = 4$, $y = 3$.

EJERCICIO 110.

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 1º) $1 + a^2 + b^2 + c^2$ | 2º) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ |
| 3º) 37 | 4º) -13 |
| 5º) 0 | 6º) -39 |
| 7º) -4 | 8º) -8 |
| 9º) 38 | 10º) 0 |
| 11º) $x = 2, y = -3, z = 4$ | 12º) $x = 5, y = 2, z = -4$ |
| 13º) $x = -2, y = 6, z = 1$ | 14º) $x = 3, y = 3, z = 3$ |
| 15º) $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{5}, z = \frac{1}{6}$ | 16º) $x = 10, y = 8, z = 7$ |
| 17º) $x = -1, y = -2, z = -3$ | 18º) $x = 2, y = -2, z = \frac{1}{2}$ |
| 19º) $u = 5, v = 4, w = 3$ | 20º) $p = 6, q = -5, r = 4$ |

EJERCICIO 111.

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1º) 7,6 ; 3,2 | 2º) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ |
| 3º) A 8 \$; B 11 \$ | 4º) Juan 25 años ; Pedro 20 años |
| 5º) 3 km/h ; 24 km/h | 6º) 15 millas/h ; 510 millas/h |
| 7º) 8,5 km/h ; 4,5 km/h | 8º) 8 km/h ; 2 km/h |
| 9º) 13,5 millas/h ; 4,5 millas/h | 10º) 6 km/h ; 2 km/h |
| 11º) 165 millas/h ; 15 millas/h | 12º) 22 millas/h ; 4 millas/h |
| 13º) 40, 12 | 14º) 20, 10 |
| 15º) b. 150 ; p. 140 | 16º) 30, 48 |
| 17º) $\frac{11}{26}$ | 18º) 120, 90 |
| 19º) 24, 32 | 20º) 10, 36 |
| 21º) 13, 9 | 22º) 80, 72 |
| 23º) 8 y 14 | 24º) 140, 110 |
| 25º) m. 1,00 \$, n. 0,50 \$ | 26º) 23, 18 |
| 27º) 43 | 28º) 35 |
| 29º) 25 | 30º) 60, 40 |
| 31º) 6 m/s ; 4 m/s | 32º) 150 \$ |
| 33º) 60, 140 | 34º) $mp/(p+q), mq/(p+q)$ |
| 35º) 36 h ; 45 h | 36º) 10 y 8 |

37º) 75 v, 60 v

38º) A $1\frac{1}{2}$ m/seg B $1\frac{2}{3}$ m/seg

39º) 7 m/s; 5 m/s

40º) 285 millas/h; 1 300 millas

EJERCICIO 112.

1º) 3,5, 4,5, 5

2º) 20, 10, 6

3º) M 12, P 15, J 17 años

4º) A 15\$, B 25\$, C 12\$

5º) l., 60 k/h; aut., 150 k/h; av., 300 k/h

6º) 8, 11, 16 años

7º) 100°, 60°, 20°

8º) 9 000 \$, 7 000 \$, 4 000 \$

9º) 15, 25, 20

10º) A 80\$, B 90\$, C 40\$

11º) A 6, B 8, C 10 días

12º) 345

13º) 861

14º) 742

15º) 963

16º) 414

17º) A $6\frac{6}{7}$ h, B 48 h, C $9\frac{3}{5}$ h

18º) A 26\$, B 14\$, C 8\$

19º) leche, 20,0; cereal, 23,6; huevo, 7,3 onzas.

EJERCICIO 113.

1º) $x = 4$, $y = 2$

2º) $x = -3$, $y = 5$

3º) $x = 8$, $y = 6$

4º) $u = \frac{1}{3}$, $v = -\frac{1}{4}$

5º) $x = 5$, $y = 7$

6º) $x = 0,2$, $y = 0,3$

7º) $x = 15$, $y = 18$

8º) $x = 12$, $y = -35$

9º) $x = 8$, $y = 2$

10º) $x = 12$, $y = -4$

11º) $x = 6$, $y = 7$

12º) $x = \frac{1}{5}$, $y = -\frac{1}{3}$

13º) $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{4}$

14º) $x = 5$, $y = \frac{1}{5}$

15º) $x = a + b$, $y = b - a$

16º) $x = a$, $y = b$

17º) $x = 4$, $y = 2$

18º) $x = 3$, $y = -1$

19º) $x = -2$, $y = 3$

20º) imp.

21º) cobre, 1,8 kg; níquel, 15 kg

22º) 27, 12

23º) 45 000 \$, 60 000 \$

24º) óm. 11, aut. 9

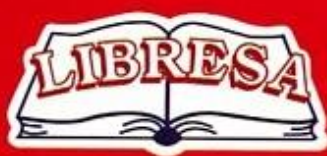
- 25°) alc. 40 ag. $5\frac{1}{3}$ gal. 26°) 180 km ; 72 km/h
- 27°) 63 28°) 9 km/h ; 1 km/h
- 29°) 60 h ; 6 h 30°) sub. 240, baj. 160 km
- 31°) $x=1, y=2, z=3$ 32°) $x=2, y=-3, y=-1$
- 33°) $x=10, y=-10, z=8$ 34°) $u=\frac{1}{2}, v=3, w=\frac{3}{2}$
- 35°) $x=6, y=9, z=15$ 36°) $x=\frac{1}{5}, y=\frac{1}{4}, z=-\frac{1}{6}$
- 37°) $x=a, y=b, z=-a+b$ 38°) $x=a+b, y=a-b, z=2a$
- 39°) $x=a, y=b, z=c$ 40°) $x=4, y=5, z=2, u=1$
- 41°) 125, 400, 700 42°) 40, 18, 15
- 43°) 1\$: 15, 5\$: 18, 10\$: 25 44°) 310\$, 290\$, 30\$
- 45°) 24 ov.; 18 v.; 12 cab.
- 46°) 1^a: 100 g, 2^a: 200 g, 3^a: 50 g
- 47°) 4, 10, 16
- 48°) $a=120.300, b=-903, c=-3$
- 49°) 257 50°) 1956 51°) 31
- 52°) 127 53°) -81 54°) 0
- 55°) b^3
- 56°) $ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2c - c^2a$
- 57°) $x=8, y=-5$
- 58°) $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{10}$
- 59°) $x=4, y=2, z=0$
- 60°) $x=-1, y=2, z=7.$

REPASO GENERAL. (CAPÍTULOS 11-13)

- 1°) $x=-2$
- 2°) $x=\frac{1}{2}$
- 3°) $r=\frac{L-2d}{\pi}-R; r=3 \text{ dm}$

- 4º) 0,6 milla
- 5º) 4 millas por hora
- 6º) A: $a(b-m)/(b-a)$, B: $b(m-a)/(b-a)$
- 7º) a) $-0,5$; b) $0,4$; c) 0
- 8º) $2\pi r^3$
- 9º) 25 m
- 13º) $x=5$, $y=1$
- 14º) $x=1/(a+b)$, $y=1/(a-b)$
- 15º) $x=-2$, $y=3$
- 16º) $x=\frac{1}{5}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{2}$
- 17º) $x=1/(c-a)(c-b)$, $y=1/(a-b)(a-c)$, $z=1/(b-a)(b-c)$
- 18º) $x=8$, $y=-6$, $z=10$
- 19º) 60%, 40%, 10%
- 20º) aleación: 225 kg, estaño: 25 kg, bismuto: 30 kg.

www.opentor.com



ex
KAPELUZ

